

## CT图像重建中的一种新型滤波器

杨坪坪<sup>1</sup>, 冯汉升<sup>2,3</sup>, 许继伟<sup>3</sup>, 宋云涛<sup>1,2,3</sup>

1. 中国科学技术大学, 安徽 合肥 230026; 2. 中国科学院等离子体物理研究所, 安徽 合肥 230031; 3. 中科离子医学技术装备有限公司, 安徽 合肥 230088

**【摘要】**滤波反投影图像重建算法中滤波器设计是其中至关重要的一环。针对现有一次指数滤波器空域波形存在明显振荡、频域曲线截止频率附近没有明显压低的问题, 引入高斯滤波器减小 Gibbs 效应, 并设计一种用于 CT 重建领域的新型滤波器, 即改进高斯滤波器。通过仿真实验对比说明滤波器中加权因子选择对图像质量的影响, 另与 RL 滤波器、SL 滤波器、一次指数滤波器、高斯滤波器实验对比验证了该滤波器拥有良好的抗噪性能, 有效减小重建图像灰度波动以及明显提高重建图像质量。

**【关键词】**计算机断层成像技术; 图像重建; 一次指数滤波器; 高斯滤波器; 仿真实验

**【中图分类号】**R318; TP301.6

**【文献标志码】**A

**【文章编号】**1005-202X(2021)07-0814-06

### A novel filter for CT image reconstruction

YANG Pingping<sup>1</sup>, FENG Hansheng<sup>2,3</sup>, XU Jiwei<sup>3</sup>, SONG Yuntao<sup>1,2,3</sup>

1. University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China; 2. Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China; 3. Hefei CAS Ion Medical and Technical Devices Co. Ltd, Hefei 230088, China

**Abstract:** Filter design is an important part in the filtered back projection image reconstruction algorithm. In view of the problem that the existing first-order exponential filter has obvious oscillations in the space domain waveform and no significant pressure drop near the cut-off frequency of the frequency-domain curve, a Gaussian filter is introduced to reduce Gibbs effect, and a novel filter (improved Gaussian filter) is designed for CT image reconstruction. The comparison of simulation experiments reveals the effect of the selection of weighting factors in the filter on the image quality. In addition, the comparison among RL filter, SL filter, first-order exponential filter and Gaussian filter verify that the proposed filter has a good anti-noise performance, and that it can effectively reduce the grayscale fluctuation of the reconstructed image and significantly improve the quality of the reconstructed image.

**Keywords:** computed tomography; image reconstruction; first-order exponential filter; Gaussian filter; simulation experiment

### 前言

随着计算机断层成像技术(CT)在医学成像、工业无损检测、地球勘探等领域应用愈加广泛, 人们对 CT 成像质量要求越来越高<sup>[1-2]</sup>。重建算法<sup>[3-7]</sup>一直是 CT 技术的核心, 其主要分为解析算法和迭代算法, 其中解析算法以滤波反投影(Filtered Back Projection, FBP)算法为主, 相较迭代算法, 解析算法耗时明显更少, 因此商业应用更加广泛。就解析算法中的 FBP

算法而言, 其实现主要分为滤波、反投影重建两步, 其中滤波器的设计对重建图像质量起着关键作用。常见的滤波器有 RL 滤波器和 SL 滤波器等<sup>[8-11]</sup>, 但均各有不足。RL 滤波器采用矩形窗对斜坡滤波器进行截取, 有明显的 Gibbs 现象, 表现为严重的振荡效应。

SL 滤波器采用 sinc 窗函数 $\left(\sin c(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ 对斜坡

滤波器进行截取, 振荡现象减弱, 但因其低频段偏离斜坡函数, 因此低频段重建质量不如 RL 滤波器。此外文献[12]指出, 通过加权因子的选择, 一次指数滤波器能达到 RL 滤波器、SL 滤波器相似的效果, 其性能效果是 RL 滤波器、SL 滤波器的折中。本文通过对一次指数滤波器的研究引入高斯滤波器, 并进一步设计了一种新型滤波器——改进高斯滤波器, 从滤波器设计原理出发, 通过仿真实验结果对比分析验

【收稿日期】2021-01-18

【作者简介】杨坪坪, 硕士, 研究方向: 医学图像重建, E-mail: yang1212@mail.ustc.edu.cn

【通信作者】冯汉升, 博士, 研究员, Email: hsfeng@ipp.ac.cn

证了该滤波器在有无噪声的情况下,都能很好地抑制图像灰度波动,同时能有效改善重建图像质量,重建性能表现优越。

## 1 原理介绍

### 1.1 FBP算法

FBP重建算法可分为二维图像重建与三维图像重建,但其滤波器设计是通用的。FBP算法中的滤波步骤主要是为了消除反投影图像中存在的星状伪影。研究指出星状伪影可以在反投影重建之前进行滤波消除,其滤波实现较先反投影后滤波更为简单,称为FBP算法<sup>[2]</sup>。FBP算法具体实现步骤(以二维图像重建为例)为:

(1)对某一个角度下的投影数据 $p_\theta(t)$ 作一维傅里叶变换,记为 $P_\theta(w)$ :

$$P_\theta(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) e^{-2\pi w t} dt \quad (1)$$

(2)对 $P_\theta(w)$ 进行一维斜坡滤波器 $H(w) = |w|$ 滤波,记为 $P'_\theta(w)$ :

$$P'_\theta(w) = P_\theta(w) |w| \quad (2)$$

(3)对 $P'_\theta(w)$ 进行傅里叶逆变换,记为 $p'_\theta(t)$ :

$$p'_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P'_\theta(w) e^{2\pi w t} dw \quad (3)$$

(4)对滤波后的投影图像( $0^\circ$ 到 $180^\circ$ 的投影图像)作反投影累加加权,得到重建图像 $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \int_0^\pi p'_\theta(t) |t|_{t=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \quad (4)$$

### 1.2 滤波器设计

理论上滤波器 $H(w) = |w|$ 是一个无限频带的滤波函数,无法实现<sup>[13-14]</sup>。但在实际成像过程中,投影数据高频分量比较小,且投影过程(X射线成像过程)中有平均作用,相当于低通滤波,因此可以采用滤波窗函数对斜坡函数在截止频率( $B \leq \frac{1}{2d}$ ,其中 $d$ 为探测器间距)范围内进行加窗<sup>[15]</sup>,如下:

$$H(\rho) = |\rho| W(\rho) \quad (5)$$

因此,滤波器设计实际上是窗函数选取的过程。判断窗函数的优劣一般有3个指标:主瓣、近旁瓣、远处旁瓣。窗函数的选择一般要求主瓣高而窄,空间分辨率越高,最大旁瓣相对主瓣尽可能幅度小,数值精度越高,密度分辨率越高,同时远旁瓣幅度与幅值小,曲线过渡平滑,以防止严重的Gibbs现象<sup>[16-17]</sup>。

### 1.3 一次指数滤波器

文献[12]指出,一次指数滤波器能通过加权方式达到与RL滤波器、SL滤波器相似的效果,其形式如式(6)所示。

$$W(\rho) = e^{\frac{-a|\rho|}{2B}} \quad (6)$$

其中, $a$ 为加权因子, $B$ 为截止频率。通过选择不同的加权因子,一次指数滤波器能达到不同的效果。

文献指出,当 $a$ 取0.64时,其效果类似于SL滤波器,其频域曲线<sup>[18]</sup>、空域曲线<sup>[19]</sup>如图1和图2所示。

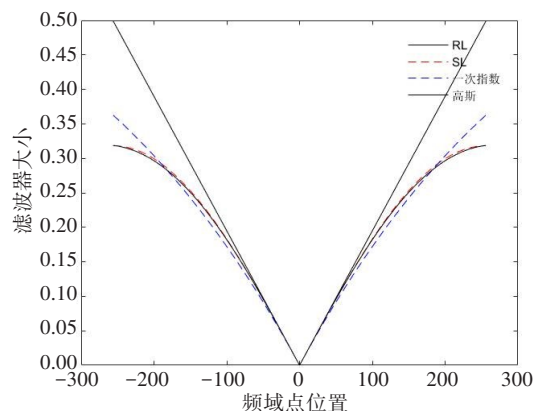


图1 一次指数函数 $a=0.64$ ,高斯函数 $k=1.8$ 与SL、RL函数频域对比  
Fig.1 First-order exponential function  $a=0.64$ , Gaussian function  $k=1.8$ , compared with SL and RL functions in the frequency domain

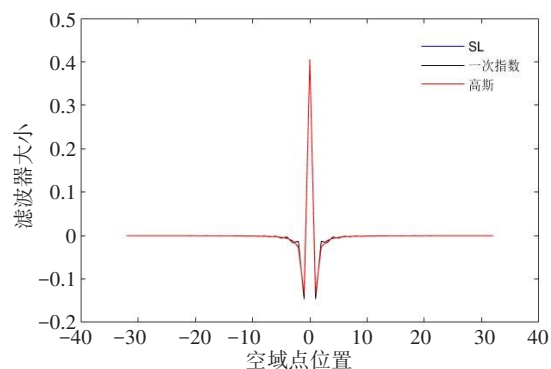


图2 一次指数函数 $a=0.64$ ,高斯函数 $k=1.8$ 与SL、RL函数空域对比  
Fig.2 First-order exponential function  $a=0.64$ , Gaussian function  $k=1.8$ , compared with SL and RL functions in the space domain

从图1、图2中可明显看到,当一次指数滤波器权重 $a=0.64$ 时,其频域曲线近似直线,与RL滤波器更相似,其空域曲线存在明显的振荡,频域曲线截止频率附近没有明显压低,因此会存在明显的Gibbs效应,并且对高频噪声十分敏感。据此,引入高斯滤波器,其形式如下:

$$W(\rho) = e^{-k(\frac{\rho}{2B})^2} \quad (7)$$

式中, $k$ 为加权因子。当 $k=1.8$ 时,其频域曲线与空域曲线见图1、图2。可以明显看出,高斯滤波器通过加权能更加逼近于SL滤波器,空域曲线光滑,没有出现明显的振荡现象,频域曲线截止频率附近较一次指数滤波器明显压低,能有效抑制Gibbs现象。且当 $k=0$ 时,高斯滤波器等同于RL滤波器,因此高斯滤波器

实际应用效果是RL、SL滤波器的折中。为了进一步验证高斯滤波器相比一次指数滤波器的优良性,后文将会采用仿真实验对比验证。

## 2 改进高斯滤波器

为了进一步改进高斯滤波器,本文设计了新型滤波器——改进高斯滤波器,其形式如下:

$$W(\rho) = \cos\left(a1 * \frac{\rho B}{2\pi}\right) e^{-a2 * (\frac{\rho}{2B})^2} \quad (8)$$

式中, $a1$ 、 $a2$ 为加权因子。可以看出,当 $a1 = 0$ 时,改进高斯滤波器退化为高斯滤波器。其中 $a1$ 加权因子的引入是为了实现对高斯滤波器截止频率附近的进一步压低以减小 Gibbs 效应以及噪声影响,其加权因子对比频域曲线见图3。

更进一步,本文做了针对不同加权因子的剖面灰度曲线对比图,其参数与后文的重建参数一致。

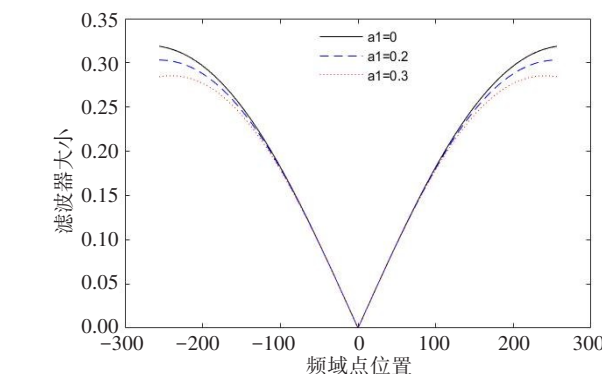
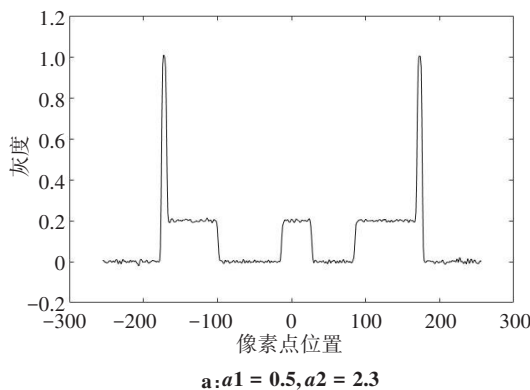


图3  $a2=1.8$ 时, $a1$ 取0、0.2、0.3时改进高斯滤波器频域对比图  
Fig.3 Comparison of the frequency domain of the improved Gaussian filter when  $a1=0, 0.2$  and  $0.3$ , with  $a2=1.8$

灰度曲线表征了图像的粗糙程度,曲线波动越大,图像越粗糙。从图4中可以看出,当 $a1$ 给定时, $a2$ 越大图像越平滑,能更好地还原原始模型。

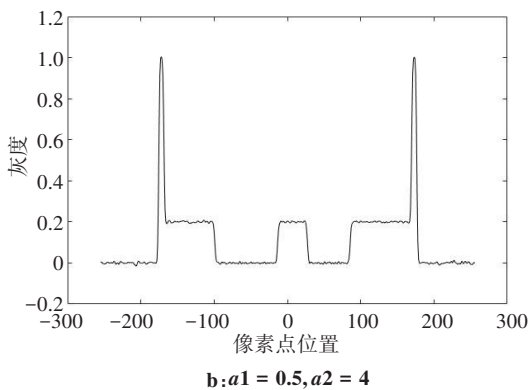


图4  $a1 = 0.5, a2$ 取2.3、4.0时的灰度曲线对比  
Fig.4 Comparison of grayscale curve when  $a2=2.3$  and  $4.0$ , with  $a1=0.5$

为了进一步验证实验结果评价图像质量,引入常用的医学图像判据,其形式如下:

(1)归一化均方距离 $d$ :

$$d = \frac{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N (t_{x,y} - r_{x,y})^2}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N (t_{x,y} - t')^2} \quad (9)$$

式中, $t_{x,y}$ 、 $r_{x,y}$ 分别表示模型原图和重建图对应点的像素密度, $t'$ 表示模型原图密度的平均值,图像像素 $N \times N$ 个。归一化均方距离表征了少数点的大误差情况。

(2)归一化平均绝对距离 $r$ :

$$r = \frac{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N |t_{x,y} - r_{x,y}|}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N |t_{x,y}|} \quad (10)$$

归一化平均绝对距离表征了多数点的小误差情况。从表1可以看出, $a2$ 越大图像越平滑,但相应的

重建误差将会增大,其中归一化均方距离误差明显升高。因此实际重建过程中,需要根据需求灵活选择加权因子。

表1  $a1 = 0.5, a2$ 取2.3、4.0时改进高斯滤波器的重建误差对比  
Tab.1 Comparison of reconstruction error of the improved Gaussian filter when  $a2 = 2.3$  and  $4.0$ , with  $a1=0.5$

改进高斯滤波器	$a1=0.5, a2=2.3$	$a1=0.5, a2=4.0$
归一化均方距离	0.318 4	0.324 0
归一化平均绝对距离	0.166 6	0.166 0

## 3 改进高斯滤波器仿真实验对比

为了测试改进高斯滤波器实际应用效果,对滤波器在无噪声情况与加噪声情况下的重建过程进行模拟实验验证。其中重建模型采用二维Shepp-Logan图像<sup>[20]</sup>,重建模式选用二维平行束重建,投影角度取 $0^\circ$ 到 $179^\circ$ ,

步长为 1, 重建图像大小为 512×512, 探测器采样点数 512, 重建像素间隔与探测器采样间隔均取 1 mm。分别取无噪声与有噪声情况下的重建结果图, 灰度曲线图与重建误差表(分别为归一化均方距离误差表与归一化平均绝对距离误差表)进行对比, 其中灰度曲线图采用像素位置 256 处的重建图像横向剖线, 一次指数滤波器权值取 0.64, 高斯滤波器权值取 1.8, 改进高斯滤波器权值  $a_1=0.5, a_2=2.3$ 。

3.1 无噪声情况下不同滤波器重建结果与相应的灰

度曲线图

通过图 5 与表 2 可以发现, 一次指数滤波器重建效果与 RL 滤波器相似, 灰度曲线波动很大, 图像粗糙, 重建误差也很大。高斯滤波器重建效果与 SL 滤波器相似。改进高斯滤波器灰度曲线相比其他滤波器明显更平滑, 其重建误差明显减小, 归一化均方距离与 SL 滤波器差距不大, 其归一化平均绝对距离却比 SL 滤波器小许多。因此, 在无噪声情况下, 改进高斯滤波器重建结果明显优于其他滤波器。

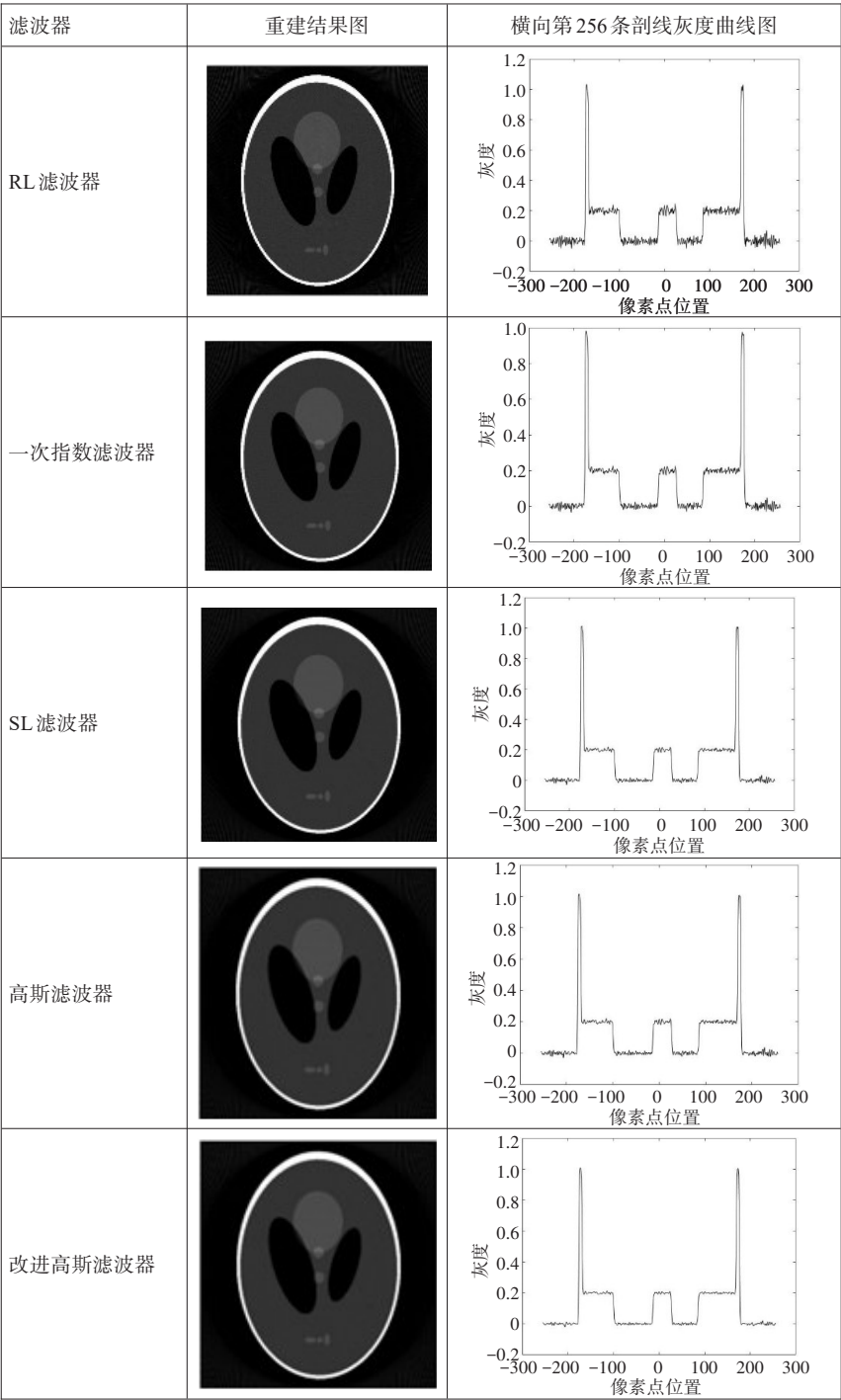


图 5 无噪声情况下不同滤波器重建结果与相应的灰度曲线图

Fig.5 Reconstruction results of different filters in the case of noise-free and the corresponding grayscale curves



表2 不同滤波器重建误差表  
Tab.2 Reconstruction errors of different filters

误差	RL 滤波器	SL 滤波器	一次指数滤波器	高斯滤波器	改进高斯滤波器
归一化均方距离	0.336 2	0.316 9	0.331 9	0.317 7	0.318 4
归一化平均绝对距离	0.230 4	0.176 2	0.204 1	0.179 1	0.166 6

3.2 有噪声情况下不同滤波器重建结果与相应的灰度曲线图

从图6可以看出,在有噪声情况下,一次指数滤波器重建灰度曲线图略优于RL 滤波器,且明显劣于SL 滤波器,高斯滤波器与改进高斯滤波器,因此重建图像非常粗糙。高斯滤波器重建灰度曲线较SL 滤波器更平滑。改进高斯滤波器重建灰度曲线较其他滤波器波动明显更小,更加趋近于原始图像。

为了进一步验证改进高斯滤波器的抗噪性能,采用抗噪性能明显优于RL 滤波器的SL 滤波器进行对比,做了3组噪声对比实验,加噪噪声采用平均值为0、方差为1的不同强度高斯噪声进行对比,产生噪声命令如下:

$$\text{noise}=\text{sqrt}(k)\times\text{randn}(\text{size}(I)) \tag{11}$$

其中,k为参数,I为原始图像,noise为噪声图像,randn能根据图像大小产生标准正态分布序列。因此可以通过选取不同k值达到模拟不同噪声强度的目的。

从表3、表4可以看出,改进高斯滤波器在不同噪声强度下保持重建归一化均方距离误差相差不大的情况下,其

归一化平均绝对距离误差明显更小,因此拥有比SL 滤波器更优的抗噪性能。

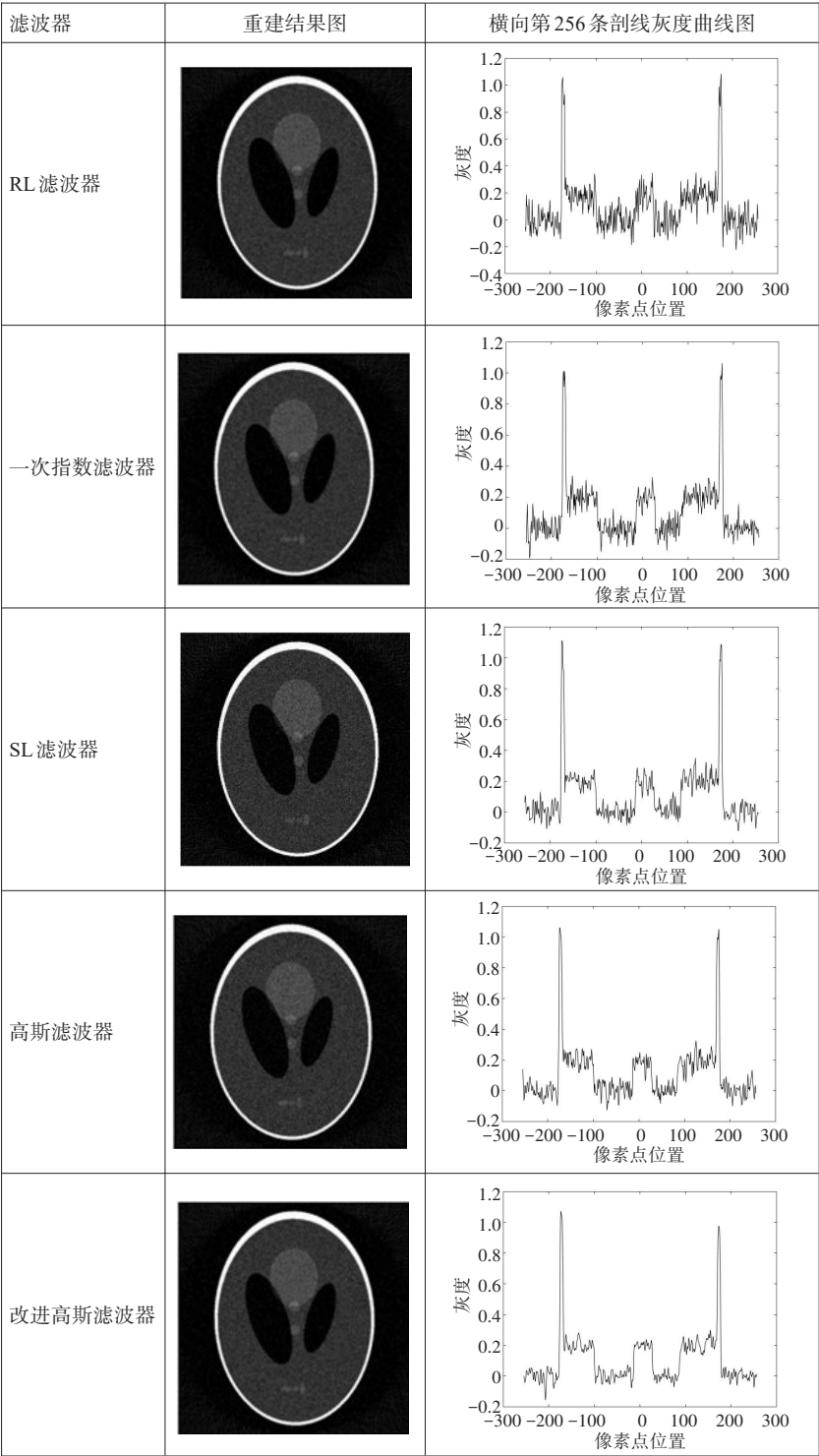


图6 有噪声情况下不同滤波器重建结果与相应的灰度曲线图  
Fig.6 Reconstruction results of different filters in case of noises and the corresponding grayscale curves

表3 SL滤波器、改进高斯滤波器在不同噪声强度下的重建归一化均方距离

Tab.3 Reconstruction normalized mean square distances of SL filter and improved Gaussian filter under different noise intensities			
滤波器	k=0.01	k=0.02	k=0.03
SL滤波器	0.609 0	0.785 4	0.921 4
改进高斯滤波器	0.606 5	0.785 9	0.926 3

表4 SL滤波器、改进高斯滤波器在不同噪声强度下的重建归一化平均绝对距离

Tab.4 Reconstruction normalized average absolute distances of SL filter and improved Gaussian filter under different noise intensities			
滤波器	k=0.01	k=0.02	k=0.03
SL滤波器	0.709 4	0.967 5	1.163 8
改进高斯滤波器	0.686 2	0.939 5	1.137 1

4 结 论

本文从已有对指数滤波器的研究出发,分析了一次指数滤波器的不足,引入高斯滤波器,并进一步改进提出一种新型滤波器。通过仿真实验对比分别验证了该滤波器较RL滤波器、SL滤波器、一次指数滤波器、高斯滤波器的优良特性,它有效抑制了重建时的灰度波动,重建图像更加平滑,且在有无噪声的情况下,均能保持更佳的重建图像质量,重建误差明显更小。此外,在改进高斯滤波器加权因子选择 $a1=0.5$ 、 $a2=2.3$ 时,该滤波器能在有效保持图像平滑的同时减小重建误差。

【参考文献】

[1] 张朝宗,郭志平. 工业CT技术与原理[M]. 北京: 科学出版社, 2009. ZHANG C Z, GUO Z P. Industrial CT technology and principles[M]. Beijing: Science Press, 2009.

[2] 庄天戈. CT原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992. ZHUANG T G. Principle and algorithm of CT [M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992.

[3] 曾更生. 医学图像重建[M]. 英文版. 北京: 高等教育出版社, 2009. ZENG G S. Medical image reconstruction [M]. English Version. Beijing: Higher Education Press, 2009.

[4] 黄力宇,朱守平,匡涛. 医学断层图像重建仿真实验[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2015. HUANG L Y, ZHU S P, KUANG T. Simulation experiment of medical tomographic image reconstruction[M]. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology Press, 2015.

[5] 毛小渊. 二维CT图像重建算法研究[D]. 南昌: 南昌航空大学, 2016. MAO X Y. Research on 2D CT image reconstruction algorithm[D]. Nanchang: Nanchang Aviation University, 2016.

[6] 李媛. CT滤波反投影算法重建精度研究[D]. 太原: 中北大学, 2017. LI Y. Research on reconstruction accuracy of CT filtered back projection algorithm[D]. Taiyuan: Zhongbei University, 2017.

[7] GULLBERG G T, DEFRISE M, PANIN V Y, et al. Backprojection filtering reconstruction algorithm for circle-plus-line trajectory in cone beam CT[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0911008.

[8] WEI Y, WANG G, HSIEH J. An intuitive discussion on the ideal ramp filter in computed tomography (I)[J]. Comput Math Appl, 2005, 49 (5-6): 731-740.

[9] 王晓鹏,王明泉,侯慧玲. 基于R-L-MS-L滤波函数的CT图像重建[J]. 电视技术, 2014(7): 26-28. WANG X P, WANG M Q, HOU H L. CT image reconstruction based on R-L-MS-L filter function [J]. Television Technology, 2014(7): 26-28.

[10] MUNSHI P. Error analysis of tomographic filters. I: theory[J]. NDT E Int, 1992, 25(4): 191-194.

[11] 高洁,杨波,孔斌. 三维锥束重建中滤波器的设计[J]. 计算机系统应用, 2011, 20(3): 116-120. GAO J, YANG B, KONG B. Filter design in 3D cone beam reconstruction [J]. Application of Computer Systems, 2011, 20(3): 116-120.

[12] 骆岩红. CT图像重建滤波反投影算法中指数滤波器的研究[J]. 计算机科学, 2014, 41(z1): 220-223. LUO Y H. Research on exponential filter in CT image reconstruction filtering back projection algorithm [J]. Computer Science, 2014, 41 (z1): 220-223.

[13] 姜建国,曹建中,高玉明. 信号与系统分析基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. JIANG J G, CAO J Z, GAO Y M. Fundamentals of signal and system analysis[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.

[14] 黄魁东,张定华,王苦愚,等. DR成像系统点扩展函数测量与图像恢复[C]//全国射线数字成像与CT. 2009. HUANG K D, ZHANG D H, WANG K Y, et al. Point spread function measurement and image restoration of DR imaging system [C]// National Digital Radiography and CT. 2009.

[15] 闫锐,李磊. CT图像重建算法[M]. 北京: 科学出版社, 2014. YAN B, LI L. CT image reconstruction algorithm [M]. Beijing: Science Press, 2014.

[16] 杨位钦. 时间序列分析与动态数据建模[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1986. YANG W Q. Time series analysis and dynamic data modeling [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1986.

[17] 郑君里,应启珩,杨为理. 信号与系统[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2000. ZHENG J L, YING Q Y, YANG W L. Signals and systems [M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2000.

[18] 洪振厚,周彬,郭金川. 锥束X射线CT图像重建的新型滤波函数[J]. 深圳大学学报(理工版), 2017, 34(3): 284-289. HONG Z H, ZHOU B, GUO J C. A new filter function for cone beam X-ray CT image reconstruction [J]. Journal of Shenzhen University (Science and Technology Edition), 2017, 34(3): 284-289.

[19] 刘晓,杨朝文. RL滤波函数的改进对卷积反投影图像重建的影响[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2004, 41(1): 112-117. LIU X, YANG C W. The effect of the improvement of the RL filter function on the image reconstruction of convolution back projection [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2004, 41(1): 112-117.

[20] SHEPP L A, LOGAN B F. The Fourier reconstruction of a head section [J]. IEEE Trans Nucl Sci, 2013, 21(3): 21-43.

(编辑:黄开颜)