

基于正则变分模型的医学影像非线性复原方法

王静, 韩雪, 刘红敏, 王志衡

河南理工大学计算机科学与技术学院, 河南 焦作 454003

【摘要】针对传统医学影像复原方法会产生丢失细节、边界模糊等复原效果不理想以及算法计算复杂的问题,本文采用了一种有效的全变分正则化迭代方法对含有模糊和噪声的退化医学影像进行处理。该方法结合ROF模型具有的保持边缘和结构的特性,充分利用图像能量间的梯度关系,在经典变分去噪模型中加入模糊核算子,对于该凸泛函模型采用变量分离的思想,引入二次惩罚项和松弛变量将图像变分复原的无约束优化问题分解为一系列子问题,结合交替Split Bregman技术和解的框式制约,直接对泛函进行迭代,同时引入阈值算子和收缩技术来优化子问题的求解,同时达到了保持医学影像重要边缘和细节信息和克服传统方法计算复杂的目的。仿真结果表明,与传统复原方法相比,该方法提高了图像的信噪比,均方误差也明显减小,克服了振铃效应,改善了图像的视觉效果,证明了该方法的有效性,且该方法具有良好的稳定性和快速的收敛性,可以更有效的应用于临床诊断以及后续分割。

【关键词】医学影像复原;退化;全变分;交替split Bregman;阈值算子

【中图分类号】R312;TP391

【文献标志码】A

【文章编号】1005-202X(2017)11-1117-07

Nonlinear medical image restoration method based on canonical variation model

WANG Jing, HAN Xue, LIU Hongmin, WANG Zhiheng

School of Computer Science and Technology, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China

Abstract: The existing medical image restoration methods have some problems such as loss of detail, blurred boundary and algorithm computational complexity. Herein, we adopt an efficient total variation regularized iterative method to deal with blurred and noisy degraded medical images. This proposed method combines the characteristics of ROF model to preserve edges and structures, makes full use of the gradient relationship between the image energy, and adds fuzzy kernel operators to the classical variational denoising model. For the convex functional model, the idea of variable separation is adopted, and the two penalty item and relaxation variables are introduced to decompose the unconstrained optimization problem into a series of subproblems, and combined with the alternating split Bregman technique and frame control of the reconciliation, the function is iterated directly. Meanwhile, the threshold operator and contraction technique are introduced to optimize the subproblems for maintaining important edges and details of medical images and overcoming the computational complexity of traditional methods. The simulation results show that compared with the traditional restoration methods, this proposed method improves the signal-to-noise ratio of the image, significantly reduces mean square error, overcomes the ringing effect, and improves the image visual effect, which proves the validity of the method. The method can be more effective applied to clinical diagnosis and subsequent segmentation for it has a good stability and a fast convergence.

Keywords: medical image restoration; degeneration; total variation; alternating split Bregman; threshold operator

前言

计算机断层扫描成像(Computed Tomography,

CT)、核磁共振成像(Magnetic Resonance Imaging, MRI)等计算机影像辅助诊断(Computer Aided Diagnosis, CAD)技术在医学诊断中发挥了极大的作用^[1],但是其在形成、传输、存储的过程中不可避免会产生一定程度的失真,比如人体的运动、成像医疗设备固有的噪声等,都会造成医学图像的模糊或噪声等质量退化。这些退化可能会掩盖和降低某些细节信息,影响医生对病变组织和正常组织进行精确判断,会降低临床诊断的正确性,从而增加误诊率,因而对退化的医学影像进行复原处理,以得到清晰完

【收稿日期】2017-06-29

【基金项目】国家自然科学基金(61401150,61472119,61572173);河南理工大学博士基金(B2013-039);河南理工大学创新型科研团队计划(T2014-3)

【作者简介】王静,博士,讲师,研究方向:计算机视觉与图像处理,E-mail: wjasmine@hpu.edu.cn;韩雪,硕士研究生,研究方向:信息处理与模式识别技术,E-mail: hanxue2011@yeah.net

【通信作者】刘红敏,博士,副教授,研究方向:图像处理,E-mail: hongminliu@hpu.edu.cn

整的图像,具有很高的研究价值。

图像复原问题是计算机视觉和图像处理领域的主要研究问题之一,医学图像复原中常见的退化问题就是噪声和模糊问题^[2]。一个好的复原方法应该是在去除噪声和模糊的同时又能较好的保持影像原有的组织细节和边缘信息,这样才能更精确的进行后续的医学图像分析。传统的医学图像复原方法,如非线性中值滤波(Nonlinear Median Filter, NMF)虽然在一定条件下可以克服线性滤波器所带来的细节边缘模糊,且可以处理脉冲干扰和图像扫描噪声,但对于复原具有精细边缘轮廓和复杂细节的图像却不适用^[3]。自适应维纳滤波(Adaptive Wiener Filter, AWF)是一种有约束的医学复原方法,它可以根据图像的局部方差,信噪比,自相关函数等特性的估计值来调整输出从而实现对退化图像的自适应复原^[4]。但这两类复原方法均是依据图像整体的统计特性进行图像复原,不具有各向异性,所以不可避免的会将图像的一些细节特征去掉,从而使恢复出的图像在边缘和细节特征看起来比较模糊。

近年来,基于偏微分方程(Partial Differential Equations, PDE)的非线性扩散算法越来越多的被运用到图像复原、分割、增强等诸多领域并取得了巨大成功^[5],其中最著名最具有影响力的就是全变差(Total Variation, TV)正则化方法,最初是由Rudin等^[6]首先应用于高斯噪声图像复原,因而称此有界TV正则化去噪模型为ROF模型。该算法用 L_1 范数替代 L_2 范数,采用拉格朗日乘子法和人工时间演化的梯度下降法,将图像去噪问题转化为能量泛函最小化的优化问题,它对消除噪声和细节保留的折中处理,使之成为了目前应用最成功的图像去噪模型之一。但是这种方法编程复杂且迭代百次,推演速度缓慢,并且得到的图像会存在一定的阶梯效应^[7]。针对此不足学者们在求解 L_1 正则项的优化问题上作了大量研究^[8-11]。其中Goldstein等^[12]提出一种求解 L_1 范数问题的优化迭代算法,并将它成功应用在MRI压缩感知图像重构领域上^[13-14]。

本文针对传统医学影像复原方法会产生丢失细节、边界模糊等复原效果不理想以及算法计算复杂的问题,采用了一种有效的全变分正则化迭代方法(Split Bregman Method of Total Variation, SBMTV)对含有模糊和噪声的退化医学图像进行处理。该法结合了ROF模型具有的保持边缘和结构的优良特性,在经典全变差去噪模型的基础上构建了新的泛函模型,充分利用图像能量间的梯度关系,基于交替Split Bregman(Alternating Split Bregman, ASB)技术和解

的框式约束对其进行优化求解,并将其应用到医学影像上,通过仿真实验验证,该方法不仅可以从含有噪声和模糊两种退化的医学影像中恢复出细节清晰的图像,克服了振铃效应,而且实现了算法的加速收敛。在求解过程上保持正则化参数为一个常数,占用内存小并且在计算中我们分为两步分别进行求解,降低了传统梯度法的计算复杂度,保持了医学影像的重要边缘和细节信息,与传统复原方法相比,图像信噪比有明显提高,均方误差也大大减小,证明了该方法更好的发挥了计算机辅助治疗的性能,可以更加有效的应用于临床。

1 ASB方法基本思想

对于如下的一个无约束优化问题:

$$\min_{x \in X} \|\Phi(x)\|_1 + H(x) \quad (1)$$

其中 X 是一个闭合的凸集合, $X \rightarrow \mathbb{R}$, $\|\Phi(x)\|_1$ 、 $H(x)$ 都是凸函数, $\|\cdot\|_1$ 表示 L_1 范数。然后,引入一个辅助变量 y ,将此无约束优化问题转化为等价的约束优化问题:

$$\min_{x \in X, y \in \mathbb{R}} \|y\|_1 + H(x), \text{ s.t. } y = \Phi(x) \quad (2)$$

根据变量分离理论,在式(2)中添加一个有关 y 和 $\Phi(x)$ 的二次惩罚项,将其转化为下面的无约束优化问题:

$$\min_{x \in X, y \in \mathbb{R}} \|y\|_1 + H(x) + \frac{\lambda}{2} \|y - \Phi(x)\|_2^2 \quad (3)$$

在这里, $\lambda > 0$ 是惩罚因子,它的值为一个常数, $\|\cdot\|_2$ 表示 L_2 范数。令 $E(x, y) = \|y\|_1 + H(x)$,所以式(3)变为:

$$\min_{x \in X, y \in \mathbb{R}} E(x, y) + \frac{\lambda}{2} \|y - \Phi(x)\|_2^2 \quad (4)$$

定义任意凸函数 E 在点 v 处的Bregman距离为:

$$D_E^p(u, v) = E(u) - E(v) - \langle p, u - v \rangle \quad (5)$$

其中 $p \in \partial E(v)$ 表示泛函 E 在点 v 处的次梯度。所以对上述无约束问题引入Bregman距离,用该迭代算法进行求解,步骤如下:

$$\begin{aligned} (x^{k+1}, y^{k+1}) &= \arg \min_{x \in X, y \in \mathbb{R}} D_E^p(x, x^k, y, y^k) + \frac{\lambda}{2} \|y - \Phi(x)\|_2^2 \\ &= (x, y) - \langle p_x^k, x - x^k \rangle - \langle p_y^k, y - y^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|y - \Phi(x)\|_2^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$p_x^{k+1} = p_x^k - \lambda (\nabla \Phi)^T (\Phi(x^{k+1}) - y^{k+1}) \quad (7)$$

$$p_y^{k+1} = p_y^k - \lambda (d^{k+1} - \Phi(x^{k+1})) \quad (8)$$

我们再次引入一个辅助变量 b ,推导过后,可简单表示为:

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = \arg \min_{x, y} \left\{ \|y\|_1 + H(x) + \frac{\lambda}{2} \|y - \Phi(x) - b^k\|_2^2 \right\} \quad (9)$$

$$b^{k+1} = b^k + \Phi(x^{k+1}) - y^{k+1} \quad (10)$$

对式(9)进行变量分离,再进一步简化,最终表示为:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \arg \min_x H(x^k) + \frac{\lambda}{2} \|y^k - \Phi(x^k) - b^k\|_2^2 \\ y^{k+1} = \arg \min_y \|y^k\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|y^k - \Phi(x^k) - b^k\|_2^2 \\ b^{k+1} = b^k + (\Phi(x^{k+1}) - y^{k+1}) \end{cases} \quad (11)$$

运用该方法求解类似问题时,实现了带有 L_1 范数优化问题的快速计算,文献^[15]对该方法的收敛性进行了分析和证明,显示了该方法的快速收敛性和数值求解过程的稳定性。

2 迭代变分正则化模型求解方法

从数学角度来讲,图像复原过程是一个不适定的逆过程,其数学模型为:

$$F = H * u + n \quad (12)$$

F 是已知的退化图像, u 是原始图像, H 是模糊核矩阵,模糊过程可以看做模糊核 H 和真实图像 u 的卷积过程, n 是均值为零,方差为 σ^2 的高斯白噪声。图像恢复就是根据已知条件求解真实图像的估计,因而为了克服医学图像复原问题本身的不适定问题,一般通过引入正则化的方法进行求解。

加入模糊核算子的 ROF 正则化模型如下:

$$\min_{u, \lambda} \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (Hu - F)^2 dx \quad (13)$$

离散形式为:

$$\min_{u, \lambda} \|Du\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|Hu - F\|_2^2 \quad (14)$$

其中 H 为模糊算子,式(13)第一项为全变分正则项,可以看做是图像 u 的梯度的 TV 范数,其作用是减少振荡,减少噪声起到平滑图像的效果;第二项为保真项,控制着复原图像和退化图像之间的差异,降低图像失真程度。 $\lambda > 0$, 是调节两项平衡的因子。该模型在图像边缘处可以抑制平滑,在平坦区域则增加了平滑量,因而可以有效复原图像,本文就利用该模型进行医学影像复原。

针对医学影像成像过程中的退化问题,为了得到复原视觉效果好且求解过程方便易行、收敛性和稳定性均良好的复原结果,我们结合 ASB 技术和解的框式制约对全变分复原模型(14)进行求解,首先我们将该问题也看做一个无约束的优化问题,我们令 $d = Du$, 所以式(14)可转化为:

$$\min_{u, d} \|d\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|Hu - F\|_2^2, \quad \text{s.t. } d = Du \quad (15)$$

引入上式约束条件的惩罚项,将式(15)变为无约束问题:

$$\min_{u, d} \|d\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|Hu - F\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d - Du\|_2^2 \quad (16)$$

式(16)与第二部分中的(3)相对应,因此在这里仍然引入参数 b , 然后利用 ASB 方法将式(16)分解成两个子优化问题分别进行迭代求解,这样就降低了求解难度,那么全变分医学影像复原问题就变成了求解以下式子:

$$u^{k+1} = \arg \min_u \frac{\lambda}{2} \|Hu^k - F\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d^k - Du^k - b^k\|_2^2 \quad (17)$$

$$d^{k+1} = \arg \min_d \|d^k\|_1 + \frac{\mu}{2} \|d^k - Du^{k+1} - b^k\|_2^2 \quad (18)$$

$$b^{k+1} = b^k + (Du^{k+1} - d^{k+1}) \quad (19)$$

可以看出,3个式子是相互包含相互关联的, u, d, b 都是在不断迭代更新的,因而,得到的 u 会一次比一次好,这时在迭代的时候根据要求设置停止条件,就可以得到不仅有效减少了噪声和模糊,而且保留了良好有效细节的最终复原图像。

算法具体求解步骤如下:

① 输入参数:模糊核 H , 噪声水平 σ^2 , 调节参数 λ, μ ;

② 初始化:令 $k=0, d^0=b^0=0, u^0=F$;

③ 按照公式(17)、(18)、(19)采用交替最小化方向法 (Alternating Direction Method, ADM)^[16] 求解 $u^{k+1}, d^{k+1}, b^{k+1}$, 在此步骤中,我们将(17)进一步简化为如下迭代公式:

$$u^{k+1} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} H^T F + D^T (d^k - b^k)}{D^T D + \frac{\lambda}{\mu} H^T H} \quad (20)$$

该式利用傅里叶变换和反变换进行简化计算^[8,15]。

对于式(18),根据其结构特点,我们参考文献^[17],引入阈值算子,利用收缩技术^[18],将式子最终变为下式求解:

$$d^{k+1} = \max \left\{ \|Du^{k+1} + b^k\|_2 - \frac{1}{\mu}, 0 \right\} \frac{Du^{k+1} + b^k}{\|Du^{k+1} + b^k\|_2} \quad (21)$$

④ 满足停止准则,则终止迭代;否则, $k=k+1$, 转回步骤③。

3 实验及结果分析

为了验证该算法对医学影像复原的有效性能,采用实际的3幅临床医学影像进行实验(分别为肺部CT图像、横结肠恶性肿瘤CT图像,脑部MRI测试图)分别从视觉评估效果和客观评价指标两个方面进行验证,通过与3种现有的临床应用中的复原方法进行对比分析,证明了我们的模型在保留图像细节方面以及信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)、均方误差(Mean Square Error, MSE)等定量指标方面都优于现有方法。不仅如此,实验也表明了我们的模型

不仅对CT图像具有良好的效果,而且对核MRI图像也具有很好的适应性。

实验环境采用处理器为 Intel (R) Celeron (R) CPU G550 1.6 GHz, 内存大小 2 G, 软件版本为 Matlab2014a。客观评价标准采用目前使用最广泛的指标 SNR、峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)以及最小 MSE。在实验中,我们引入了迭代停止准则,实验终止的条件为相邻两次迭代结果满足 $\|u^k - u^{k-1}\| \leq 1E-4$ 则终止迭代。实验所用客观数据的计算公式定义如下:

$$\text{SNR} = 20 \log_{10}(S/N) \quad (22)$$

$$\text{PSNR} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{255^2 \times M \times N}{\|u(i,j) - F(i,j)\|^2} \right) \quad (23)$$

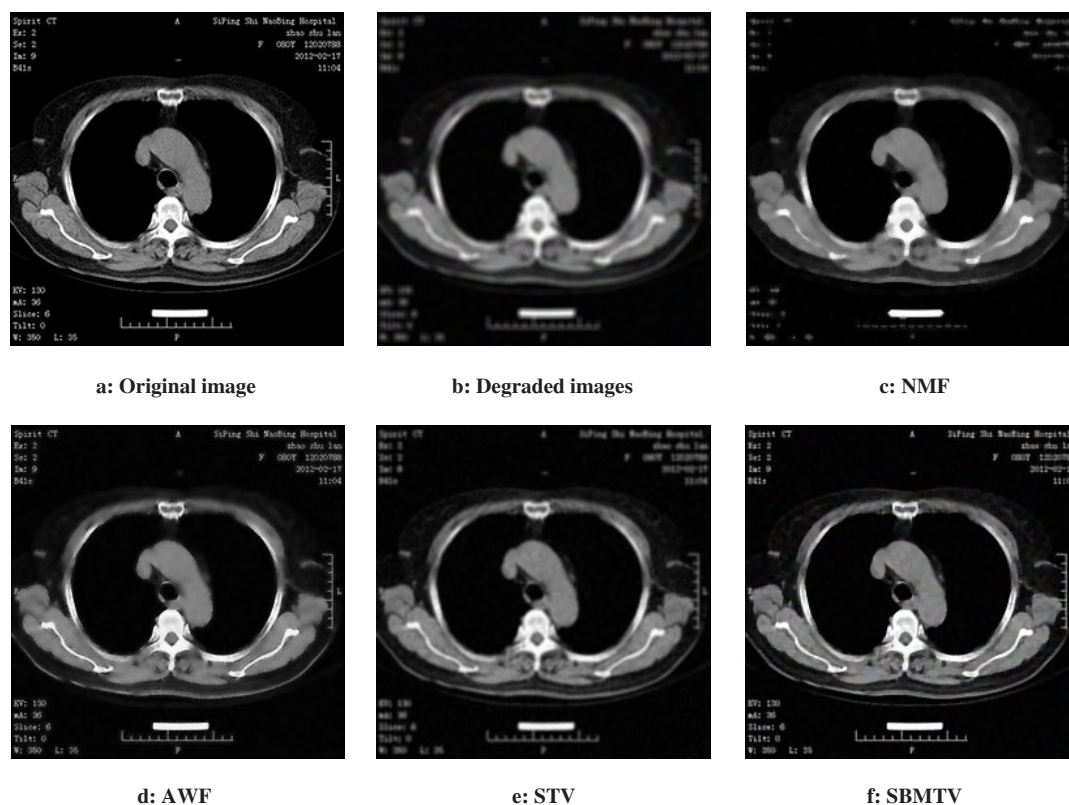
$$\text{MSE} = \frac{\sum_{0 \leq j \leq N} \sum_{0 \leq i \leq M} \|u(i,j) - F(i,j)\|^2}{M \times N} \quad (24)$$

式(22)中 S 为图像所有像素的局部方差, N 为噪声方差, 式(23)、(24)中为 $u(i,j)$ 恢复图像, $F(i,j)$ 为退化图像, $M \times N$ 表示图像尺寸。

实验1(图1)和实验2(图2)首先采用标准的分辨率 256×256 大小的两幅CT图像在相同模糊核不同噪声强度下进行实验验证,实验1采用方差为0.001的模糊

图像,实验2采用方差为0.002的模糊图像,图1和图2分别显示了笔者的SBMTV算法在不同的退化情况下与NMF方法、AWF方法、STV方法对比的效果图。可以通过图1、图2明显的在视觉上看出,SBMTV算法恢复出的图像图f比图c、d、e的边界都清晰,更加接近真实图像,保持了各部分的功能结构细节的完整性,可以很好的区分病灶部分与正常结构。表1、表2分别显示了肺部CT图像和横结肠恶性肿瘤CT图像分别使用不同方法进行复原的客观性能定量指标。由图表可以看出SBMTV方法和AWF方法在SNR、PSNR、MSE 3个指标上明显优于NMF方法和STV的梯度下降法,但SBMTV算法比AWF方法还要高出一个点,且从视觉上来看图2d在保边性能上不如图2f,从两组的MSE均为最小也可以看出SBMTV算法复原出的图像最接近于真实图像,可以更好的看出软组织的结构。

为了验证算法的适用性,我们对脑部MRI测试图像进行了实验3,见图3。图3为不同复原方法下对脑部MRI测试图进行实验后的恢复图像,表3为脑部测试图在不同方法下的客观性能指标,我们将噪声强度进一步提高同样发现可以得到清晰的复原图像,我们的方法在脑病理图像的结构和灰度变化的保持上优于现有复原方法,再一次证明了SBMTV算



NMF: Nonlinear median filter; AWF: Adaptive wiener filter; STV: Standard total variation; SBMTV: Split Bregman method of total variation

图1 肺部CT 4种算法恢复结果

Fig.1 Recovery results of 4 algorithms for pulmonary CT

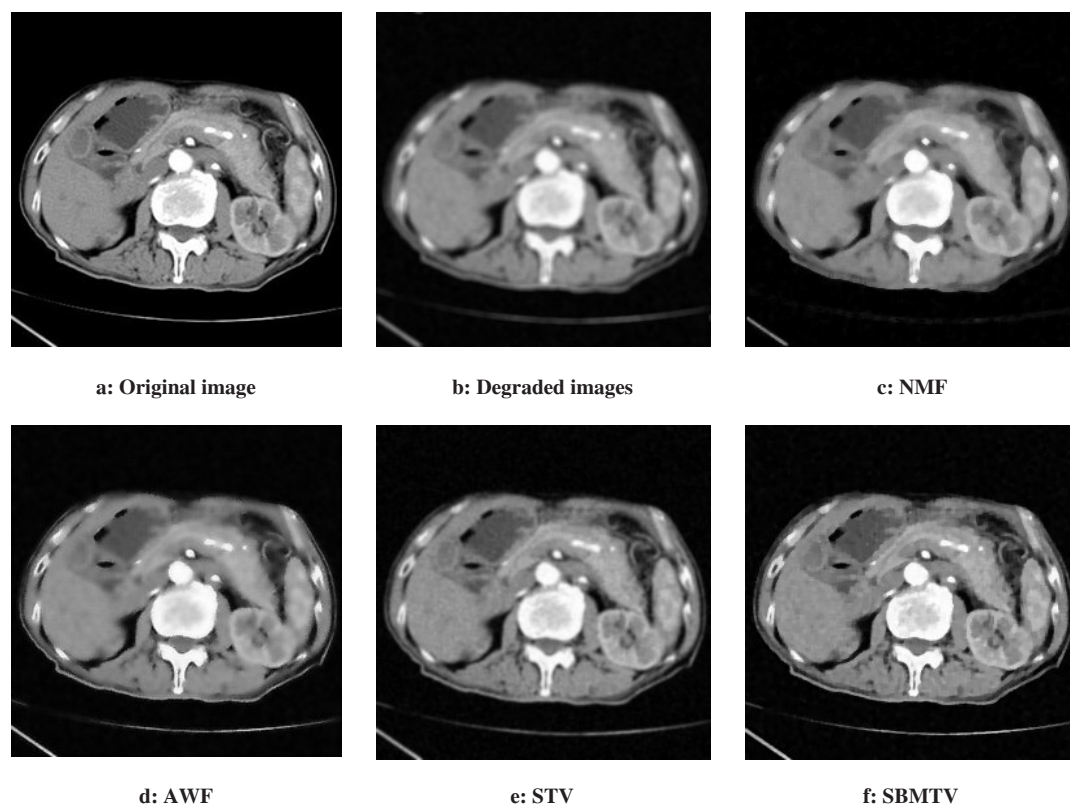


图2 横结肠恶性肿瘤CT 4种算法恢复结果

Fig.2 Recovery results of 4 algorithms for colon cancer CT

表1 肺部CT 4种算法客观复原性能比较

Tab.1 Comparison of objective restoration performance among 4 algorithms for pulmonary CT

	SNR	PSNR	MSE
Degraded images	9.286 5	22.267 3	0.005 9
NMF	9.706 9	22.687 7	0.005 4
AWF	15.882 4	28.863 2	0.001 3
STV	12.425 1	27.305 9	0.002 4
SBMTV	16.498 0	29.478 9	0.001 1

SNR: Signal-to-noise ratio; PSNR: Peak signal-to-noise ratio; MSE: Mean square error

法的优越性能。进一步地,为了证明算法具有快速的收敛性能,笔者对肺部CT影像和脑部MRI影像分别进行了实验,图4为两种类型的复原医学图像的SNR随迭代次数变化的收敛效果图,图4a迭代58次,在迭代13次就达到了最优的效果,图4b迭代55次,在迭代4次达到了最优解,虽SNR有所下降,但最终得到的解仍然是收敛的,可以明显地看出我们的方法可以实现对医学影像复原算法的快速收敛。

从以上实验结果图和表1、表2、表3看出,我们

表2 横结肠恶性肿瘤CT 4种算法客观复原性能比较

Tab.2 Comparison of objective restoration performance among 4 algorithms for colon cancer CT

	SNR	PSNR	MSE
Degraded images	13.967 5	24.663 7	0.003 4
NMF	14.416 1	25.112 3	0.003 1
AWF	19.209 8	29.906 0	0.001 0
STV	17.423 9	28.120 1	0.001 5
SBMTV	19.724 2	30.420 4	0.000 9

的方法适用于成像复杂的医学图像,有更好的复原性能和细节处理能力,图像恢复效果比现有常用的3种方法都要优越,实现了快速收敛的同时在视觉效果和客观评价指标上都有明显的提升。迭代变分正则化算法在去除模糊和噪声的复原效果上都要优于经典全变分复原模型,去噪声和去模糊的同时也保留了医学影像的重要细节的边缘和轮廓,便于对病灶部位进行更加精确的后期诊断。

4 结 语

我们的医学影像复原方法采用变分的非线性扩散模型结合ASB正则化迭代算法,求解过程中引入

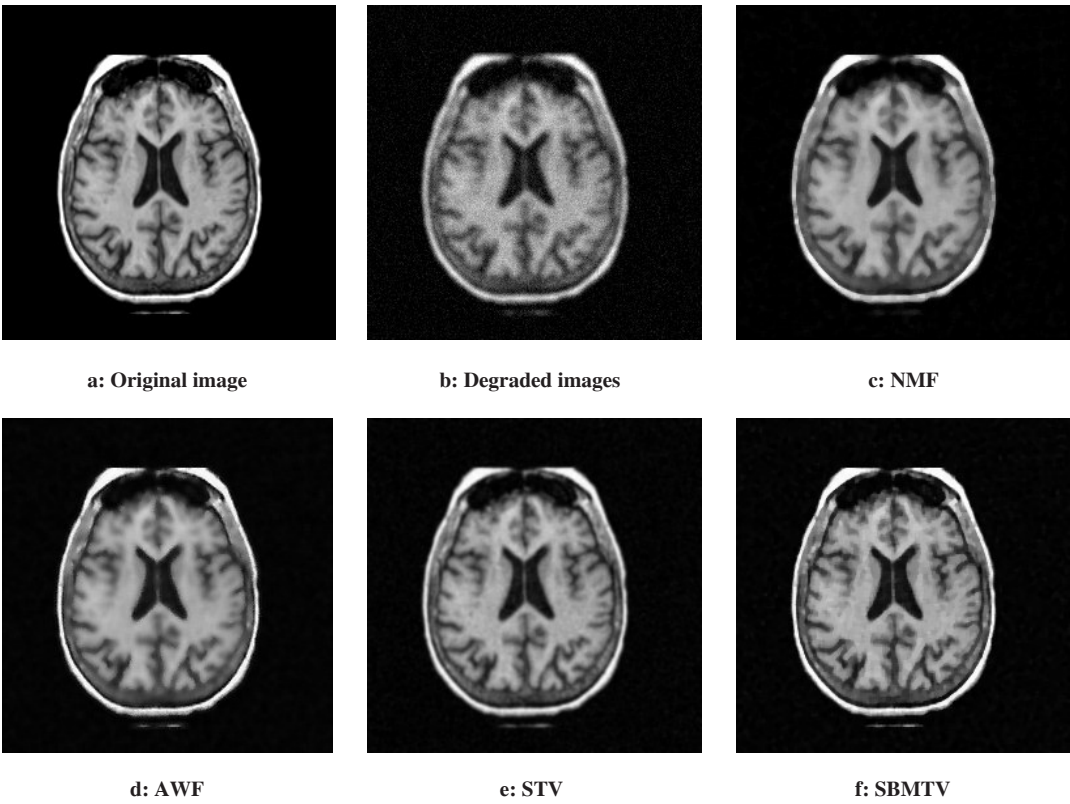


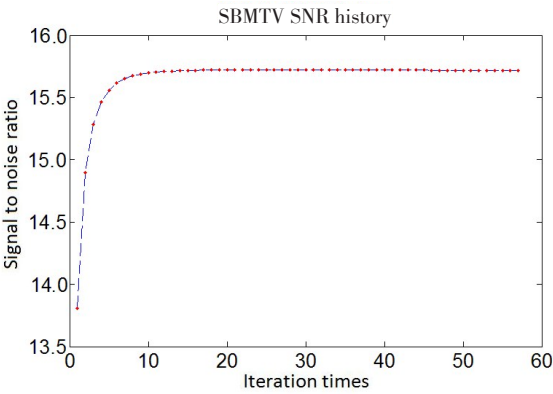
图3 脑部MRI测试图4种算法恢复结果

Fig.3 Recovery results of 4 algorithms for brain magnetic resonance image

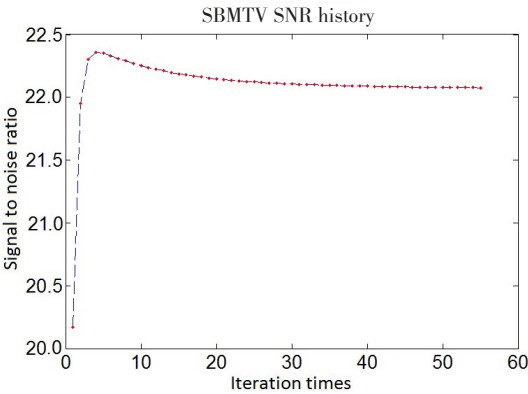
表3 脑部MRI 4种算法客观复原性能比较
Tab.3 Comparison of objective restoration performance among 4 algorithms for brain magnetic resonance image

	SNR	PSNR	MSE
Degraded images	13.335 6	24.665 4	0.003 4
NMF	16.035 8	27.364 6	0.001 8
AWF	18.951 5	30.280 4	0.000 9
STV	17.562 9	28.891 7	0.000 8
SBMTV	20.596 8	31.696 3	0.000 7

阈值算子和收缩技术优化子问题的求解,且迭代过程中设置停止准则,适时地终止迭代,不仅证明了算法具有快速的收敛性能,而且实现了对复杂医学影像复原的良好效果,方法适用性强,提高了图像的SNR、减小了MSE的同时,保持了医学图像良好的结构特性。通过与现有复原方法进行比较实验验证,本文的方法不仅从主观视觉上去噪去模糊复原细节效果上优于传统复原方法,而且在各方面客观指标上都显示出我们的复原方法所具有的优越性能,极大的保持了医学影像原本的清晰度,从而使医生对



a: Convergence diagram of pulmonary CT



b: Convergence diagram of brain magnetic resonance image

图4 复原图像SNR收敛效果图

Fig.4 Recovery image SNR convergence effect diagram

病理图像可以进行精确辨认,也更加有利于进行后续的分割、配准等处理过程。通过实验,笔者也发现在噪声强度很大时,复原效果还有待提高,因而今后会进一步研究此不足之处,从多方面进行改进,研究出更有效的医学影像复原算法。

【参考文献】

- [1] DOI K. Computer-aided diagnosis in medical imaging: historical review, current status and future potential [J]. Comput Med Imaging Graph, 2007, 31(4-5): 198-211.
- [2] 孔德兴. 医学图像处理中的数学理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
KONG D X. Mathematical theory and method in medical image processing [M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [3] 强彦, 卢军佐, 赵涓涓. PET/CT 医学图像去噪方法的研究[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2012, 52(8): 1056-1060.
QIANG Y, LU J Z, ZHAO J J. Medical image denoising method base on PET/CT [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2012, 52(8): 1056-1060.
- [4] ZHANG R, OUYANG W, CHAM W K. Image deblocking using dual adaptive FIR wiener filter in the DCT transform domain[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE Computer Society, 2009: 1181-1184.
- [5] CHAN T F. Image processing and analysis: variational, PDE, wavelet, and stochastic methods[M]. Book News, Inc., 2005.
- [6] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [7] ZHU L X, XIA D S. Staircase effect alleviation by coupling gradient fidelity term[J]. Image Vision Comput, 2008, 26(8): 1163-1170.
- [8] 常璐璐, 张化朋. 基于自适应全变差的B超图像快速去噪算法[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2016, 36(5): 50-55.
CHANG L L, ZHANG H P. Fast denoising algorithm for B-mode images based on adaptive total variation [J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science), 2016, 36(5): 50-55.
- [9] YIN W T, OSHER S, GOLDFARB D, et al. Bregman iterative algorithms for L_1 -minimisation with applications to compressed sensing[J]. SIAM J Imaging Sci, 2008, 1(1): 143-168.
- [10] OSHER S, MAO Y, DONG B, et al. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising[J]. Math Comput, 2011, 8(1): 93-111.
- [11] 王益艳. 联合结构张量和变指数正则变分医学图像复原[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(15): 208-211.
WANG Y Y. Medical image restoration via joint structure tensor and variable index regularization variational[J]. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(15): 208-211.
- [12] GOLDSTEIN T, OSHER S. The split Bregman method for L_1 -regularized problems[J]. SIAM J Imaging Sci, 2009, 2(2): 323-343.
- [13] HU Z, WANG Q, MING C, et al. Compressed sensing MRI reconstruction algorithm based on contourlet transform and split Bregman method[C]. International Symposium on Computational Intelligence and Design. IEEE, 2015: 164-167.
- [14] GETREUER P. Rudin-osher-fatemi total variation denoising using split Bregman[J]. Image Processing on Line, 2012, 2: 74-95.
- [15] SHI B, PANG Z F, WU J. Alternating split Bregman method for the bilaterally constrained image deblurring problem [J]. Appl Math Comput, 2015, 250: 402-414.
- [16] QIN Z. An alternating direction method for total variation denoising [J]. Optim Methods Softw, 2015, 30(3): 594-615.
- [17] SETZER S. Split Bregman algorithm, douglas-rachford splitting and frame shrinkage[C]. International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 464-476.
- [18] FAN Q, JIANG D, JIAO Y. A multi-parameter regularization model for image restoration[J]. Signal Process, 2015, 114(C): 131-142.

(编辑:薛泽玲)