

刚体转动惯量实验恒力矩测量法数据的稳定性分析

黄晓清, 刘志成, 谢鹏, 方蕊, 张子卿, 张海霞, 张智河, 许莉莉, 黄菊英, 李姗姗, 黄亚奇

首都医科大学生物医学工程学院, 北京 100069

【摘要】对刚体转动惯量测量实验中的恒力矩测量法进行数据的稳定性分析。在加速运动实验中, 采用统一实验条件, 规范实验操作的方法, 避免了除砝码质量外的其他因素对结果的影响; 在减速运动实验中, 随机产生初始角速度, 以获得大量等精度测量数据。通过对数据的分析, 得到了转动惯量测量结果的统计分布规律, 发现存在一个最佳值区间, 也得到了其他实验方法的验证。对加速和减速运动特征时间进行合理选择, 就能使测量结果稳定在最佳值区间内。当加速运动特征时间偏大时, 测量结果稳定所需的减速运动特征时间范围较大, 意味着较小的砝码质量与较慢的平均角速度能够使测量值趋于稳定。但为了避免其他因素的影响, 加速运动特征时间不宜过长。

【关键词】刚体; 转动惯量; 角加速度; 稳定性; 恒力矩

【中图分类号】R318.6; O313.3

【文献标识码】A

【文章编号】1005-202X(2016)01-0098-05

Data stability analysis of constant torque measurement in experiment of moment of inertia of rigid body

HUANG Xiao-qing, LIU Zhi-cheng, XIE Peng, FANG Rui, ZHANG Zi-qing, ZHANG Hai-xia, ZHANG Zhi-he, XU Li-li, HUANG Ju-ying, LI Shan-shan, HUANG Ya-qi

School of Biomedical Engineering, Capital Medical University, Beijing 100069, China

Abstract: Data stability analysis was conducted for the constant torque measurement used in the experiment of the moment of inertia of rigid body. In the experiment of accelerated motion, the unified experimental conditions were adopted and the experimental operation was standardized to avoid the effect of other factors, except the counterbalance mass, on the results. In the experiment of decelerated motion, the initial angular velocity was randomly chosen to obtain a large number of equally accurate measurement data. By comparing and analyzing the data, a statistical distribution law of the measurement moment of inertia was obtained, finding a range of optimal value which was verified by other experiment methods. The proper characteristic times of accelerated and decelerated motions could be selected to ensure the measurement result stays within the optimal range. If the characteristic time of accelerated motion was longer, the characteristic time range of decelerated motion for obtaining the stable measurement result was relatively larger, which means counterpoises with smaller quality and motions with slower average angular velocity could provide stable measure results. However, in consideration of other factors, the characteristic time of accelerated motion should not be overly long.

Key words: rigid body; moment of inertia; angular acceleration; stability; constant torque

前言

物体的运动规律是物理学的基础研究内容之

一。对于刚体模型, 特别是由多元件组成的复杂系统, 不同的受力情况和外界条件所引起的运动具有十分丰富的现象^[1-2]。运动生物力学的研究就常常将影响运动的神经系统、肌肉系统和骨骼系统组成的复杂运动模型简化为多个刚性环节组成的多刚体系统, 利用刚体转动定律研究各环节之间的相互作用^[3]。在对医学生的物理实验教学中, 引导学生从多刚体运动系统的角度来认识刚体转动惯量实验, 能够提高他们对实验的兴趣, 加深对实验仪器的理解: 转动

【收稿日期】2015-11-15

【基金项目】首都医科大学校长基金(1400035224); 首都医科大学医用物理学网络课程建设项目

【作者简介】黄晓清(1982-), 博士, 讲师, 主要研究方向: 生物物理。Tel: 010-83911811; E-mail: xiaoqingh@ccmu.edu.cn。

【通信作者】黄亚奇(1956-), 博士, 教授, 主要研究方向: 生物物理。Tel: 010-83911809; E-mail: yqhuang@ccmu.edu.cn。

惯量测量仪就是一个多环节的多刚体系统,其运动的规律受到各组成元件运动性质的影响。在转动惯量实验教学中,一般对具有对称性的样品进行转动惯量的测量,对转动规律进行验证,较常采用的实验方法有:三线摆法^[4]、扭摆法^[5-6]、复摆法^[7]、落体法^[8]等。

恒力矩转动法是落体法中的一种,其原理是利用力矩、旋转角加速度与转动惯量之间的联系,通过仅考虑摩擦力矩的减速运动和由砝码产生的恒外力矩与摩擦力矩共同作用下的加速运动两个过程来计算转动惯量^[8]。但在实际测量过程中,实际力矩和摩擦力矩与理论的预期总是存在偏差,系统元件的复杂受力、弹性变形等因素都可能影响测量结果^[9]。实验过程中操作的不稳定性也会造成结果的偏差。而即使在基本相同的实验条件下,由于操作者操作流程或步骤的不同,也会导致结果出现一定程度的变化^[10]。这些不可避免的复杂影响因素使得测量难以得到稳定的结果。测量结果如果具有太大的误差范围,是非常不利于实验教学开展的。

我们在对 ZKY-WZS 刚体转动惯量实验仪进行预实验的过程中,就发现了这样的不稳定性。在利用恒力矩法对载物盘转动惯量的多次等精度测量实验中,测量结果从 6.587 g/m² 至 5.751 g/m² 均有分布,最大偏差为 0.882 g/m²,达到均值 6.283 g/m² 的 14%,标准偏差为 0.140 g/m²。如果仅局限于对载物盘转动惯量本身进行测量,这个大小的误差范围并无问题。但实验需要在载物盘上累加其他样品进行测量,样品的转动惯量是加上样品之后测量结果与载物盘转动惯量的差值。样品转动惯量大小通常与载物盘转动惯量量级相近。如果多次测量的数据并不稳定,则样品转动惯量测量结果的准确性无从考查。

有许多研究从仪器构造和实验细节,如细线的绕法、直径^[10],滑轮的高度、水平与否、方向,砝码的摆动情况^[11],时间的测量^[12-13],阻力矩的产生和估算^[13]等方面讨论了提高实验精度及控制实验误差的方法。极少但有研究以调整实验仪器工作状态的方法提高实验精度^[14]。也有一些研究从数据处理优化入手,探索实验结果的可靠性^[15-16]。我们针对实验方案中的主要测量值加速运动特征时间和减速运动特征时间进行探索,对大量数据进行对比分析,力求从简单的实验操作中找到测量结果变化的规律,找到避免测量结果产生过大波动的方法,达到稳定的实验效果。在数据处理方面,我们采用 Excel 和 Origin 两

个软件分别进行计算和分析。

1 实验装置及原理

ZKY-WZS 刚体转动惯量实验仪是常用的转动惯量实验教具,沿主轴从上至下分别为:载物盘、绕线塔轮、光电门支架。载物盘上有十字分布的圆孔,可插入实验样品。绕线塔轮有 5 档不同半径。光电门有两个,相距 180°,实验时仅使用其中一个。载物盘下有挡光棒,实验时载物盘旋转,实验仪会自动连续记录 8 次挡光棒经过光电门的时间。经绕线塔轮伸出的细绳经过由升降杆控制高度的滑轮后下垂,可悬挂砝码,用以产生使载物盘旋转的力矩。

转动惯量恒力矩测量方法如下:将质量为 m 的砝码用细线绕在半径为 R 的载物盘塔轮上,让砝码自由下落,系统在恒外力矩作用下将作加速运动,测量系统旋转的角加速度 α_a ;撤去砝码和细线,给系统一个初始的角速度,测量在摩擦力矩的作用下,系统旋转的角加速度 α_d ;利用这两个角加速度,即可计算系统的转动惯量 I 。

$$I = \frac{mR(g - R\alpha_a)}{\alpha_a - \alpha_d} \quad (1)$$

其中 m 为砝码质量, R 为选择的塔轮半径, g 为重力加速度。测量原理是基于两次旋转过程的摩擦力矩相等,消去后可计算转动惯量,这要求角速度对应相同,且摩擦力正比于旋转速度。在测量角加速度的过程中,仪器对挡光棒通过光电门的时间自动进行 8 次连续记录。第 8 次时间标志该测量过程的总时间,不同的时间对应不同的角加速度。为方便描述,在文中我们用 t_8 作为每个测量过程的特征时间。若加速过程的特征时间 t_{8_a} 与减速过程的特征时间 t_{8_d} 相近,则两个过程的平均角速度相近。

这个测量方法的优点是过程简单,仅需两次测量。缺点是测量原理的关键点仅为近似,并且在本实验中所应用的角速度和角加速度均为平均值,无法做到绝对相等。即使使加速运动的过程与减速运动的过程总时间相近,即平均角速度相近,也不能保证摩擦力矩在运动过程中完全对应相等^[11, 13]。也正是这个原因导致了测量结果的不稳定。

2 数据分析

为了探究测量结果随角加速度变化的规律,我们采用恒力矩法对载物盘的转动惯量 I 进行了大量等精度实验,并对具有不同角加速度的加减速过程

分别进行匹配计算,总计840组数据。通过分析我们发现 I 的测量结果基本呈正态分布,存在一个概率最大的区间,该区间正好对应加速过程特征时间与减速过程特征时间相近的数据组所计算的结果,这与我们的预期是相同的,证实了这种测量方法的可靠性。仔细考查加减速运动特征时间与 I 数值的对应关系,我们发现减速运动特征时间较长,而加速运动特征时间较短时会使测量值偏小;反之当减速运动特征时间较短,而加速运动特征时间较长时则会偏大;当加速运动特征时间和减速运动特征时间都较大时,对于特征时间的匹配关系容错范围较大,即两者有一定差距时,仍能得到较为稳定的测量结果。

2.1 转动惯量测量值的统计分布

加速实验共计21次, $t8_a$ 从3.584 s至9.652 s,受砝码质量限制 $t8_a$ 并非连续变化,全部加速实验采用同一塔轮,绕线方向一致,滑轮高度和方向一致;减速实验共计40次, $t8_d$ 从2.935 s至10.656 s,大致连续变化。我们将每个加速实验得到的结果依次与所有减速实验结果配对,共得到840个转动惯量值。

图1给出了转动惯量测量值的分布情况。首先将测量值按 0.01 g/m^2 的间隔分组,再统计测量值落在每个组中的次数 n 。横轴为载物盘转动惯量测量值 I ,纵轴为统计次数 n 。可见测量结果大致符合正态分布,峰值中心在 6.32 g/m^2 附近。由于我们采用了全配对的方式,计算了所有组合的测量结果,且减速实验完全随机,因此可排除人为选择数据对分布的影响。

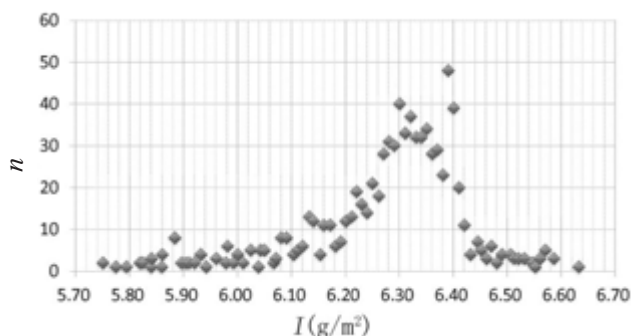


图1 载物盘转动惯量测量值 I 测量结果分布

Fig.1 Distribution of measurement results of moment of inertia (I)

Note: The center of peak is located around I of 6.32 g/m^2

从分布图可判断,本实验方法的测量结果并不是随机变化的,具有一定的统计规律。极大值区间 6.30 g/m^2 至 6.40 g/m^2 与采用落体法线性拟合得到的

测量结果 $I = 6.414 \text{ g/m}^2$ 比较接近。理论值处于峰值附近的可能性最大,通过实验控制使测量值处于此范围也具有最高的可操作性,因此将区间 6.30 g/m^2 至 6.40 g/m^2 称为最佳值区间。

2.2 转动惯量测量值与加减速实验特征时间的相关性

为了考查这个最佳值区间所对应的加减速实验,我们在图2、图3中画出了 I 随加减速实验特征时间变化的规律。

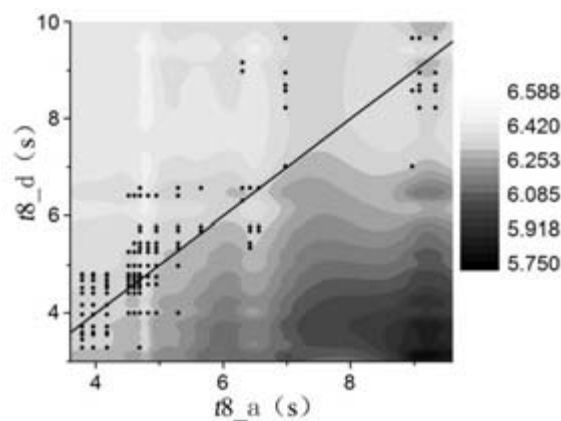


图2 载物盘转动惯量测量值 I 与加减速特征时间 $t8$ 的对应关系

Fig.2 Relationship of I and characteristic time of accelerated and decelerated motions

Note: The degree of gray indicates the magnitude of measurement results; the solid line stands for equal characteristic times of accelerated and decelerated motions. The points range from 6.30 g/m^2 to 6.34 g/m^2

横轴为加速特征时间 $t8_a$,纵轴为减速特征时间 $t8_d$,灰度表示该数据组计算的转动惯量大小,斜线处 $t8_a = t8_d$,如图2所示。在 $t8_a = t8_d$ 附近,测量结果较为稳定。为了更清楚的显示规律,我们仅选取了峰值中心附近的数据点进行标记:数据点处转动惯量数值在 6.30 g/m^2 至 6.34 g/m^2 范围内。数据点在斜线两侧大致对称分布,这与理论预期相符,即当加速运动的过程与减速运动的过程总时间相近时,平均角速度相近,两个过程中的摩擦力矩相近,可以直接消去。而当两者的特征时间相距较大时,测量结果就会偏离最佳值范围。由灰度变化趋势可以看出:当 $t8_d$ 较大, $t8_a$ 较小时, I 偏大;当 $t8_d$ 较小, $t8_a$ 较大时, I 偏小。可以注意到在 $t8_d$ 和 $t8_a$ 都较大时,对于时间的匹配关系容错范围较大,即两者的差距相对较大时,该数据组仍能得到与最佳值十分接近的测量结果。因此在实际测量中,应保证 $t8_d$ 和 $t8_a$ 尽量接近,而在 $t8_a$ 较大时, $t8_d$ 可取值的范围略大于 $t8_a$ 较小的情况。这里的原因

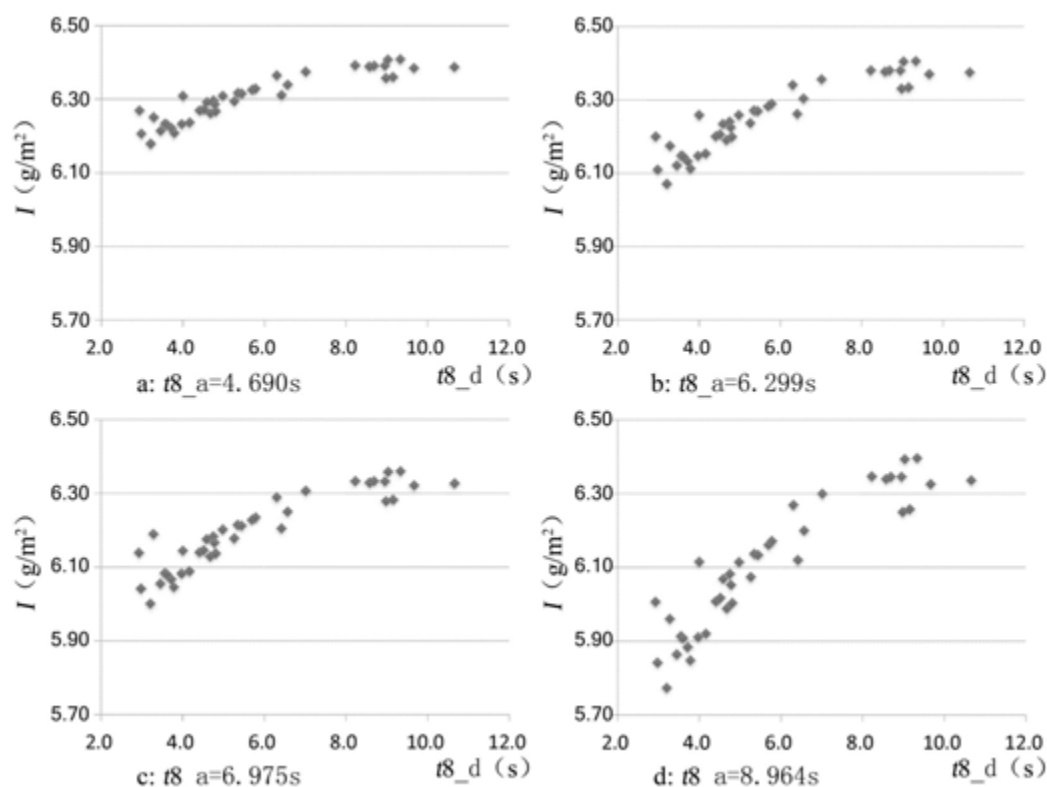


图3 在加速特征时间 t_{8_a} 不变时载物盘转动惯量测量值随减速特征时间 t_{8_d} 的变化情况

Fig.3 Change of I with different characteristic time of decelerated motion and same characteristic time of accelerated motion

可能是当 t_{8_a} 较大时,实验采用的是小质量的砝码,系统转速慢,平均角速度小,摩擦力矩与角速度的线性关系更好,加减速两个过程中的摩擦力矩更接近。但 t_{8_a} 过大时, t_{8_d} 可取值的范围又会减小,这是因为转速过慢,系统中其他影响因素就不能被忽略不计了,例如砝码摆动、细线方向的微小变化等都可能对测量产生重要的影响。

固定加速运动特征时间不变,我们可以观察到随减速运动特征时间变化的测量值变化规律。如图3所示,我们选择了4个不同的加速运动特征时间,分别绘制了测量随减速运动特征时间的变化规律。图3a中可见,测量值数值变化范围较小。随着 t_{8_a} 的逐渐增加,测量值数值变化范围越来越大,最佳值区间所对应的 t_{8_d} 时间范围也相应变大。可见加速特征时间不同时,测量值的变化规律基本相同;随着加速特征时间的增加,测量值变化范围增大。为保证测量的稳定性,加速特征时间不宜过长。

3 讨论和总结

本文针对转动惯量的恒力矩测量法进行了大量的数据分析,发现对系统转动惯量的测量结果分布

具有统计规律。存在一个最佳值区间,此区间与其他方法的测量结果相符,由此证实采用这种简单的方法进行转动惯量测量实验是可行的。通过比较加速实验与减速实验的不同特征时间对测量结果的影响,发现无论选用何种质量的砝码来产生恒力矩,无论加速实验特征时间如何变化,只要减速实验的特征时间与加速实验的特征时间相近,就能得到较为稳定的测量结果。但当加速实验特征时间较小时,对减速实验特征时间的精确度要求高;而当加速实验特征时间较大时,即使减速实验特征时间偏离稍大一些,也能得到较好的测量效果,对减速实验特征时间的精确度要求低。特征时间越长,意味着运动的平均角速度越小。这有可能是因为当角速度较小时,摩擦力矩与角速度之间越接近于正比关系,也就与本实验的测量基本原理相符越好。因此在实验时可以通过反复进行减速实验,筛选合适的数据进行计算,并且尽量采用较小质量的砝码来产生恒力矩。但考虑到其他影响因素的作用,加速时间也不宜太长。

本文所采用的数据均为同一台实验仪测量所得,系统参数唯一,并通过严格规范操作流程避免了

诸如绕线方向、滑轮高度、砝码摆动等其他次要因素的影响。减速运动实验的特征时间随机产生,避免了人为选择数据对分布规律的影响。

【参考文献】

- [1] 喀蔚波. 医用物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 18-29.
KA W B. Medical Physics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2012: 18-29.
- [2] ASHORY M R, MALEKJAFARIAN A, HARANDI P. On the accuracy of estimation of rigid body inertia properties from modal testing results[J]. Struct Eng Mech, 2010, 35(1): 53-65.
- [3] MILNER C E, FERBER R, POLLARD C D, et al. Biomechanical factors associated with tibial stress fracture in female runners[J]. Med Sci Sport Exer, 2006, 38(2): 323-328.
- [4] 张国, 黄学君. 转动惯量测试仪的改进[J]. 大学物理实验, 2015, 28(1): 60-62.
ZHANG G, HUANG X J. Improvement of the moment of inertia (MOI) measuring instrument[J]. Physical Experiment of College, 2015, 28(1): 60-62.
- [5] KLADIVOVA M, MUCHA L. Physical pendulum-a simple experiment can give comprehensive information about a rigid body [J]. Eur J Phys, 2014, 35(2): 0255018.
- [6] 赵岩, 张晓琳, 王军, 等. 非线性阻尼条件下物体转动惯量测量研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(21): 37-40.
ZHAO Y, ZHANG X L, WANG J, et al. Measurement of a moment of inertia of a sample piece under nonlinear damping condition[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(21): 37-40.
- [7] 谢亮, 张进治, 安艳伟, 等. 转动惯量测试仪的设计[J]. 物理实验, 2015, 35(7): 27-30.
XIE L, ZHANG J Z, AN Y W, et al. Instrument for measuring moment of inertia[J]. Physics Experimentation, 2015, 35(7): 27-30.
- [8] 郭长立, 李三庆. 落体法测刚体转动惯量的测量方法比较[J]. 力学与实践, 2005, 27(3): 69-72.
GUO C L, LI S Q. Comparison of different methods of measuring rigid body inertia by the falling body law [J]. Mechanics and Practice, 2005, 27(3): 69-72.
- [9] 张艳亮. 刚体转动惯量测定实验中阻力矩与角速度关系的研究[J]. 大学物理实验, 2012, 25(3): 51-53.
ZHANG Y L. The relationship of resistance moment with angular velocity in rotational rigid body experiment [J]. Physical Experiment of College, 2012, 25(3): 51-53.
- [10] 邓锂强. 刚体转动惯量实验仪实验的误差分析[J]. 实验室科学, 2013, 16(4): 27-31.
DENG L Q. Error analysis of the experiment of experimental instrument of the rigid body moment of inertia [J]. Laboratory Science, 2013, 16(4): 27-31.
- [11] 袁树青, 范学东, 樊林林. 用转动惯量仪测刚体的转动惯量误差分析[J]. 电子测量技术, 2013, 5: 63-65.
YUAN S Q, FAN X D, FAN L L. Error analysis in the measurement of the moment of inertia of rigid body using moment of inertia measuring instrument[J]. Electronic Technology, 2013, 5: 63-65.
- [12] 杨涛, 任明放. 刚体转动惯量实验中时间测量的改进方法[J]. 大学物理, 2005, 24(4): 37-39.
YANG T, REN M F. An improved method for the time measurement in the experiment of moment of inertia[J]. College Physics, 2005, 24(4): 37-39.
- [13] 邓锂强. 利用刚体转动惯量实验仪验证转动定律的设计[J]. 物理与工程, 2014, 24(1): 35-38.
DENG L Q. Design for validating the rotation law using experimental instrument for the moment of inertia of rigid body [J]. Physics and Engineering, 2014, 24(1): 35-38.
- [14] 刘德强, 张锐. 对刚体转动实验方法的研究与改进[J]. 大学物理实验, 2007, 20(1): 41-43.
LIU D Q, ZHANG R. Research and improvement of rigid body rotation experiment method [J]. Physical Experiment of College, 2007, 20(1): 41-43.
- [15] 童华. 转动惯量实验仪器的误差分析与模拟仿真[J]. 科技传播, 2014, 3: 143-144.
TONG H. Error analysis and numerical imitation of the moment of inertia measuring instrument[J]. Public Communication of Science and Technology, 2014, 3: 143-144.
- [16] 杨小静, 张民, 季诚响. 刚体转动惯量实验中数据处理的探讨[J]. 大学物理实验, 2010, 23(5): 83-84.
YANG X J, ZHANG M, JI C X. The discussion about data processing in the experiment of moment of inertia [J]. Physical Experiment of College, 2010, 23(5): 83-84.

AO松质骨拉力螺钉和组合松质骨拉力螺钉加压固定的生物力学

徐达强^{1,3}, 孙培栋², 王健¹, 赵卫东², 刘喜俊¹, 张美超², 杨惠林³

1. 南通大学附属建湖医院骨外科, 江苏 建湖 215007; 2. 南方医科大学解剖系, 广东 广州 510515; 3. 苏州大学附属第一医院骨外科, 江苏 苏州 224700

【摘要】目的:比较AO松质骨拉力螺钉和组合松质骨拉力螺钉加压固定骨折后承受动态载荷的能力。**方法:**利用0.12 g/cm³ Sawbone建立骨折模型,并用AO松质骨拉力螺钉和组合松质骨拉力螺钉结合接骨板分别加压固定,构建动态载荷装置;ElectroForce[®] 3510材料试验机给予周期动态载荷:峰/谷:150 N/100 N,每100周期峰值增加10 N,谷值在加载过程中维持不变,频率2 Hz。测量动态载荷完成1 mm位移载荷峰值及周期数。**结果:**组合松质骨拉力螺钉结合接骨板加压固定后发生1 mm位移载荷峰值及周期数显著优于AO松质骨拉力螺钉($P<0.01$)。**结论:**相对于AO松质骨拉力螺钉加压固定骨折,组合松质骨拉力螺钉加压固定更加可靠,可以承受更多的应力载荷。

【关键词】AO松质骨拉力螺钉;组合松质骨拉力螺钉;动态载荷;加压固定;生物力学

【中图分类号】R312

【文献标识码】A

【文章编号】1005-202X(2016)01-0103-03

Biomechanics of compressive fixation by using AO lag screws of cancellous bone or combined lag screws of cancellous bone

XU Da-qiang^{1,3}, SUN Pei-dong², WANG Jian¹, ZHAO Wei-dong², LIU Xi-jun¹, ZHANG Mei-chao², YANG Hui-lin³

1. Department of Orthopedics, Affiliated Jianhu Hospital of Nantong University, Jianhu 215007, China; 2. Department of Anatomy, Southern Medical University, Guangzhou 510515, China; 3. Department of Orthopedics, First Affiliated Hospital of Soochow University, Suzhou 224700, China

Abstract: Objective To compare the dynamic load bearing capability after the compressive fixation by using AO lag screws of cancellous bone or combined lag screws of cancellous bone. **Methods** The fracture model was established by using Sawbone of 0.12 g/cm³. The model was compressively fixed by AO lag screws of cancellous bone or combined lag screws of cancellous bone, and a dynamic load device was constructed. The ElectroForce[®] 3510 testing machine provided cyclic dynamic load at 2 Hz, starting with a peak load of 150 N and a valley value of 100 N. The peak load increased by 10 N per 100 cycles; the valley value maintained 100 N throughout the loading test. The peak load and the number of cycles were measured when 1 mm displacement appeared. **Results** Compared with AO lag screws of cancellous bone, the compressive fixation by using combined lag screws of cancellous bone with bone plate was better in the peak load and the number of cycles when 1 mm displacement appeared ($P<0.01$). **Conclusion** Compared with AO lag screws of cancellous bone, combined lag screws of cancellous bone is more reliable, with a higher dynamic load bearing capability.

Key words: AO lag screw of cancellous bone; combined lag screws of cancellous bone; dynamic load; compressive fixation; biomechanics

前言

【收稿日期】2015-09-12

【基金项目】江苏省骨科临床医学中心项目(BL20122004)

【作者简介】徐达强(1979-),男,博士在读,主治医师,研究方向:脊柱与创伤骨科。E-mail:xdqcy2004@sina.com。

【通信作者】杨惠林(1960-),男,教授,博士生导师,主任医师,研究方向:脊柱与创伤骨科的临床与基础。E-mail: huilin-yang2015@163.com。

移位关节内骨折的治疗原则是解剖复位、坚强固定和早期功能锻炼,AO松质骨拉力螺钉是实现这一治疗目的最为简单有效的方案^[1-2];骨折固定后在体内承受各种应力,但骨质疏松情况下,钉道对螺钉把持力的下降,AO拉力螺钉不能为骨折提供足够的稳定性^[3];随着老龄化社会的进程,合并骨质疏松的关节内骨折的发病率逐年增加;因此,改进拉力螺钉