

DOI:10.3969/j.issn.1005-202X.2021.10.016

医学信号处理与医学仪器

时滞作用下忆阻耦合FHN-ML神经元模型的分岔分析

张美娇, 张建刚, 魏立祥, 南梦冉
兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070

【摘要】通过构建时滞作用下忆阻耦合FHN-ML神经元模型,研究不同时滞对该神经元系统动力学行为的影响。利用Routh-Hurwitz判据和Hopf分岔定理证明FHN-ML神经元系统平衡点的稳定性及Hopf分岔的存在性。利用范式理论和中心流形定理进一步证明FHN-ML神经元系统的分岔方向及周期解的稳定性。通过Matlab软件绘制以反转电压和电流频率为双参的周期分岔图及以电流频率为单参的峰峰间期(ISI)分岔图,发现在时滞作用下,FHN-ML神经元系统的放电模式会产生延迟现象,且当增大时滞时,延迟程度加大,混沌放电区域减小,加周期分岔的周期数减小。所得分析结果有助于理解延迟效应对电磁辐射作用下的耦合神经网络放电活动的影响。

【关键词】FHN-ML神经元模型; Hopf分岔; 时滞; 放电模式

【中图分类号】R318; Q424

【文献标志码】A

【文章编号】1005-202X(2021)10-1273-06

Bifurcation analysis of memristor-coupled FHN-ML neuron model with time delay

ZHANG Meijiao, ZHANG Jiangang, WEI Lixiang, NAN Mengran

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: A model of memristor-coupled FHN-ML neurons with time delay is constructed to investigate the effects of different time delays on the dynamic behavior of the neuron system. The stability of the equilibrium point and the existence of the Hopf bifurcation in FHN-ML neuron system are proved by Routh-Hurwitz criterion and Hopf bifurcation theorem. The bifurcation direction and the stability of periodic solution of FHN-ML neural system are further proved by paradigm theory and center manifold theorem. The periodic bifurcation diagrams with reverse voltage and current frequency as two parameters and the inter-spike interval bifurcation diagrams with current frequency as single parameter are drawn by MATLAB software, and it is found that under the effect of time delay, the firing pattern of FHN-ML neuron system produces a delay phenomenon. With the increasing of time delay, the degree of delay increases, and the chaotic firing area decreases, and the number of periods with periodic bifurcation decreases. The results are helpful to understand the effect of delay effect on the firing activity of the coupled neural network under electromagnetic radiation exposures.

Keywords: FHN-ML neuron model; Hopf bifurcation; time delay; firing pattern

前言

神经元是生物神经系统结构和功能的基本单位。神经系统中各类神经元相互协作,以不同放电模式实现对信息的编码、传递和解码。1952年, Hodgkin 等^[1]在乌贼神经突触生理实验中提出 Hodgkin-Huxley (H-H) 神经元模型,以便精确地描述神经元放电模式。1961年, FitzHugh^[2]通过引入恢复

变量来表示膜电压的慢变过程,建立了二维 FitzHugh-Nagumo (FHN) 模型。1975年, Bautin^[3]对 FHN 模型做了拓扑和定性分析,观察到了大量的非线性现象。随后有关耦合 FHN 神经元网络动力学的研究报道不断涌现^[4-6]。

由于各类神经元之间信号处理与传递的过程存在时间延迟,激发了学者们对时滞耦合神经元的理论研究。Wang 等^[7]利用稳定性和分岔理论研究了具有时滞效应的两个相同 HR 神经元突触耦合的平衡分岔、折叠分岔和 Hopf 分岔的渐近稳定性。Mao^[8]建立具有延迟耦合的环形 FHN 神经元模型,分析神经网络的稳定性,并通过数值仿真说明耦合强度和时滞在神经网络动力学中都发挥着重要的作用。洪懿暄等^[9]研究了时滞神经网络在外部电流刺激下的

【收稿日期】2021-05-18

【基金项目】国家自然科学基金(61863022)

【作者简介】张美娇, 硕士, 研究方向: 非线性动力学, E-mail: monamjnj@163.com

【通信作者】张建刚, 教授, 研究方向: 非线性动力学, E-mail: zhangjg7715776@126.com

耦合同步问题,并通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 自适应律得到了耦合时滞网络的同步条件。

为了更好地模拟神经元间的突触结构,Strukov等^[10]证实了一种有记忆功能的非线性电阻元件(忆阻器)的存在。Zhang等^[11]探讨了初始条件对忆阻耦合 FHN 神经元模型混沌振荡以及同步过程的影响。杨腾云等^[12]利用快慢动力学讨论了含有磁控忆阻器的 ML 神经元模型的分岔行为,并描述了系统随磁通反馈系数变化时的放电模式。

本文拟基于 ML 和 FHN 神经元模型,通过引入磁控忆阻器和时滞项,建立时滞作用下忆阻耦合 FHN-ML 神经元模型,研究不同时滞作用下该系统的动力学行为。首先,拟利用 Routh-Hurwitz 判据和 Hopf 分岔定理证明系统平衡点稳定性及 Hopf 分岔的存在性。其次,拟利用范式理论和中心流形定理进一步证明系统的分岔方向及周期解的稳定性。最后,利用 MATLAB 软件绘制在不同时滞作用下系统的双参周期分岔图及单参周期分岔图,分析不同时滞对该系统放电模式的影响。

1 模型描述

为了解各类神经元之间的信息传递过程,本文基于 ML 和 FHN 神经元模型,考虑其在电磁辐射作用下会产生电磁感应现象,因此引入磁控忆阻器使得感应电流通过反馈来调节神经元的膜电位^[13];在信息处理过程中,考虑相邻神经元之间信号传递存在时间延迟,通过在耦合 FHN-ML 神经元模型中引入时滞项,从而建立时滞作用下忆阻耦合 FHN-ML 神经元模型。该系统如下:

$$\begin{cases} C_m \dot{V}_1 = -g_{Ca} m_\infty (V_1 - V_{Ca}) - g_K w (V_1 - V_K) - g_L (V_1 - V_L) - I_{ext} - I - k_1 W(\varphi) (V_1 - V_2(t-\tau)) \\ \dot{w} = \lambda (w_\infty - w) \\ \dot{I} = \alpha (0.2 + V_1) \\ \dot{V}_2 = V_2 - \frac{V_2^3}{3} - Y + I_{stim} - k_1 W(\varphi) (V_2 - V_1(t-\tau)) \\ \dot{Y} = 0.008 (V_2 + 0.7 - 0.8 Y) \\ \dot{\varphi} = k_2 (V_1 - V_2) - k_3 \varphi \end{cases} \quad (1)$$

其中, $m_\infty = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{V_1 - m_{11}}{m_{22}} \right)$, $w_\infty = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{V_1 - m_{33}}{m_{44}} \right)$, $\lambda = \frac{1}{3} \cosh \frac{V_1 - m_{33}}{2m_{44}}$, 由参考文献[14]可知: V_1 、 V_2 分别表示 ML 与 FHN 神经元的膜电位变量; C_m 表示膜

电容; g_{Ca} 、 g_K 、 g_L 分别表示 Ca^{2+} 、 K^+ 、漏电流通道的最大电导; V_{Ca} 、 V_K 、 V_L 表示反转电压; w 、 Y 分别表示 ML 与 FHN 神经元的恢复变量; I_{ext} 、 I_{stim} 分别表示 ML 与 FHN 神经元受到的外界刺激电流(电流频率为 γ); I 表示慢变调节电流; m_∞ 、 w_∞ 分别表示 K^+ 和 Ca^{2+} 通道打开概率的稳态值; λ 表示激活时间常数; α 表示时间尺度因子; m_{22} 、 m_{44} 分别是依赖于电压 m_∞ 和 w_∞ 斜率的倒数; m_{11} 、 m_{33} 分别是依赖于 m_{22} 和 m_{44} 的系统参数; k_1 、 k_2 、 k_3 表示反馈增益; φ 表示在电磁辐射作用下通过两神经元之间的磁通量; $W(\varphi)$ 表示磁通控制忆阻器的记忆电导,其表达式为 $W(\varphi) = a + 3b\varphi^2$; τ 表示信号在两神经元之间处理与传递的时间延迟。

2 平衡点稳定性及 Hopf 分岔的存在性

假设系统(1)的非负平衡点为 $E^*(V_1^*, w^*, I^*, V_2^*, Y^*, \varphi^*)$, 令 $\tilde{V}_1 = V_1 - V_1^*$, $\tilde{w} = w - w^*$, $\tilde{I} = I - I^*$, $\tilde{V}_2 = V_2 - V_2^*$, $\tilde{Y} = Y - Y^*$, $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi^*$ 。可得到系统(1)的线性化形式:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{V}}_1 = J_{11} \tilde{V}_1 + J_{12} \tilde{w} + J_{13} \tilde{I} + J_{14} \tilde{V}_2(t-\tau) + J_{16} \tilde{\varphi} \\ \dot{\tilde{w}} = J_{21} \tilde{V}_1 + J_{22} \tilde{w} \\ \dot{\tilde{I}} = \alpha \tilde{V}_1 \\ \dot{\tilde{V}}_2 = k_1 W(\varphi^*) \tilde{V}_1(t-\tau) + J_{44} \tilde{V}_2 - \tilde{Y} + J_{46} \tilde{\varphi} \\ \dot{\tilde{Y}} = 0.008 \tilde{V}_2 - 0.0064 \tilde{Y} \\ \dot{\tilde{\varphi}} = k_2 \tilde{V}_1 - k_2 \tilde{V}_2 - k_3 \tilde{\varphi} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $J_{11} = \frac{g_{Ca}(1-j_1^2)(V_{Ca}-V_1^*)}{2m_{22}C_m} - \frac{g_{Ca}(1+i_1)}{2C_m} - \frac{g_K w^*}{C_m} - \frac{g_L}{C_m}$, $J_{12} = \frac{k_1}{C_m} W(\varphi^*)$, $J_{13} = -\frac{1}{C_m}$, $J_{14} = \frac{k_1 W(\varphi^*)}{C_m}$,

$$J_{16} = \frac{6k_1 b \varphi^* (V_2^* - V_1^*)}{C_m}, \quad J_{21} = \frac{j_3 \left(\frac{1}{2} (1+j_2) w^* \right) j_4 (1-j_2^2)}{6v_{44} + 6m_{44}},$$

$$J_{22} = -\frac{j_4}{3}, \quad J_{44} = 1 - V_2^{*2} - k_1 W(\varphi^*), \quad J_{46} = 6k_1 b \varphi^* (V_1^* - V_2^*),$$

$$j_1 = \tanh \frac{V_1^* - m_{11}}{m_{22}}, \quad j_2 = \tanh \frac{V_1^* - m_{33}}{m_{44}}, \quad j_3 = \sinh \frac{V_1^* - m_{33}}{2m_{44}},$$

$$j_4 = \cosh \frac{V_1^* - m_{33}}{2m_{44}}。系统(2)在 $E_0(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 处的特征方程为:$$

$$\lambda^6 + \sum_{r=1}^6 h_{1r} \lambda^{6-r} + \sum_{r=1}^4 h_{2r} \lambda^{5-r} e^{-2\lambda\tau} + \sum_{r=1}^3 h_{3r} \lambda^{4-r} e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3)$$

其中, h_{1r_1} ($r_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), h_{2r_2} ($r_2 = 1, 2, 3, 4$), h_{3r_3} ($r_3 = 1, 2, 3$) 分别表示特征方程相应的系数。

本文将 τ 分两种情形讨论^[15]。情形一: 当 $\tau = 0$ 时, 式(3)可以写成:

$$\lambda^6 + \sum_{r=1}^6 \rho_{1r} \lambda^{6-r} = 0 \quad (4)$$

其中, $\rho_{11} = h_{11}, \rho_{12} = h_{12} + h_{21}, \rho_{13} = h_{13} + h_{22} + h_{31}, \rho_{14} = h_{14} + h_{23} + h_{32}, \rho_{15} = h_{15} + h_{24} + h_{33}, \rho_{16} = h_{16}$ 。

由Routh-Hurwitz^[16]判据可知,若式(4)的所有系数主行列式及顺序主子式全部大于0,则所有的根都具有负实部,即得到结论:系统(1)的平衡点 $E^*(V_1^*, w^*, I^*, V_2^*, Y^*, \varphi^*)$ 对于 τ 是局部渐近稳定的。

情形二:当 $\tau > 0$ 时,式(3)左右两边同时乘 $e^{i\tau}$ 即写成:

$$\left(\lambda^6 + \sum_{r=1}^6 h_{1r} \lambda^{6-r} \right) e^{i\tau} + \sum_{r=1}^4 h_{2r} \lambda^{5-r} e^{-i\tau} + \sum_{r=1}^3 h_{3r} \lambda^{4-r} = 0 \quad (5)$$

假设 $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ 是式(5)的根,分离实部与虚部后可得:

$$\begin{cases} \beta_1(\omega) \sin(\omega\tau) + \beta_2(\omega) \cos(\omega\tau) = \beta_3(\omega) \\ \beta_4(\omega) \sin(\omega\tau) + \beta_5(\omega) \cos(\omega\tau) = \beta_6(\omega) \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\beta_1(\omega) = (h_{12} - h_{21})\omega^4 + (h_{23} - h_{14})\omega^2 - \omega^6 + h_{16}, \beta_2(\omega) = h_{11}\omega^5 - (h_{13} + h_{22})\omega^3 + (h_{15} + h_{24})\omega, \beta_3(\omega) = h_{31}\omega^3 - h_{33}\omega, \beta_4(\omega) = (h_{13} - h_{22})\omega^3 + (h_{24} - h_{15})\omega - h_{11}\omega^5, \beta_5(\omega) = (h_{12} + h_{21})\omega^4 - (h_{14} + h_{23})\omega^2 - \omega^6 + h_{16}, \beta_6(\omega) = h_{32}\omega^2$ 。即可得关于 ω 的方程:

$$\beta_7^2(\omega) + \beta_8^2(\omega) - \beta_9^2(\omega) = 0 \quad (7)$$

其中, $\beta_7 = \beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6, \beta_8 = \beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4, \beta_9(\omega) = \beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4$, 如果式(7)有一个正根 ω^* , 即得: $\tau^* = \frac{1}{\omega^*} \arccos \frac{\beta_8}{\beta_9}$, 式(5)对 τ 求导, 假设 $\lambda = i\omega^*$, 化简后即得:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega^*}^{-1} = \frac{\beta_{11}\beta_{13} + \beta_{12}\beta_{14}}{\beta_{13}^2 + \beta_{14}^2} \quad (8)$$

其中,

$$\beta_{11} = \left(-\omega^{*6}\tau^* + (5h_{11} + \mu_1\tau^*)\omega^{*4} - (3\mu_3 - \mu_2\tau^*)\omega^{*2} + h_{16}\tau^* + \mu_4 \right) \cos(\omega^*\tau^*) + h_{33} - 3h_{31}\omega^{*2} - \left((6 + h_{11}\tau^*)\omega^{*5} - (4\mu_7 + \mu_5\tau^*)\omega^{*3} + (2\mu_8 - \mu_6\tau^*)\omega^* \right) \sin(\omega^*\tau^*)$$

$$\beta_{12} = \left((6 + h_{11}\tau^*)\omega^{*5} - (4\mu_7 + \mu_5\tau^*)\omega^{*3} + (2\mu_8 - \mu_6\tau^*)\omega^* \right) \cos(\omega^*\tau^*) + 2h_{32}\omega^* + \left(-\omega^{*6}\tau^* + (5h_{11} + \mu_1\tau^*)\omega^{*4} - (3\mu_3 + \mu_8\tau^*)\omega^{*2} + h_{16}\tau^* - \mu_6 \right) \sin(\omega^*\tau^*)$$

$$\beta_{13} = (h_{11}\omega^{*6} - \mu_5\omega^{*4} - \mu_6\omega^{*2}) \cos(\omega^*\tau^*) - (\omega^{*7} - \mu_7\omega^{*5} + \mu_8\omega^{*3} + h_{16}\omega^*) \sin(\omega^*\tau^*),$$

$$\beta_{14} = (\omega^{*7} - \mu_1\omega^{*5} - \mu_2\omega^{*3} - h_{16}\omega^*) \cos(\omega^*\tau^*) + (h_{11}\omega^{*6} - \mu_3\omega^{*4} + \mu_4\omega^{*2}) \sin(\omega^*\tau^*)$$

当 $\beta_{11}\beta_{13} + \beta_{12}\beta_{14} \neq 0$ 时, $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega^*}^{-1} \neq 0$, 由

Hopf分岔定理^[17]即得到结论:当 $\tau \in [0, \tau^*)$ 时,平衡点 $E^*(V_1^*, w^*, I^*, V_2^*, Y^*, \varphi^*)$ 是局部渐近稳定的;当 $\tau > \tau^*$ 时,平衡点 $E^*(V_1^*, w^*, I^*, V_2^*, Y^*, \varphi^*)$ 是不稳定的;当 $\tau = \tau^*$ 时,系统(1)在平衡点 $E^*(V_1^*, w^*, I^*, V_2^*, Y^*, \varphi^*)$ 处存在Hopf分岔。

3 分岔方向及周期解的稳定性

在前面小节中,证明了当 $\tau = \tau^*$ 时,系统(1)在平衡点 $E^*(V_1^*, w^*, I^*, V_2^*, Y^*, \varphi^*)$ 处存在Hopf分岔。下面利用范式理论^[18]和中心流形定理进一步证明分岔方向及周期解的稳定性。将系统(1)引入变换: $\dot{x}_1 = V_1 - V_1^*, \dot{x}_2 = w - w^*, \dot{x}_3 = I - I^*, \dot{x}_4 = V_2 - V_2^*, \dot{x}_5 = Y - Y^*, \dot{x}_6 = \varphi - \varphi^*$ 。设 $\tau = \tau^* + \vartheta, t \rightarrow t/\tau$, 即可得到泛函微分方程组:

$$\dot{x}(t) = L_\vartheta(x_t) + f(\vartheta, x_t) \quad (9)$$

其中, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t))^T$, L_ϑ 和 f 分别表示线性和非线性算子,同时满足:

$$L_\vartheta \phi = (\tau^* + \vartheta) M \phi(0) + (\tau^* + \vartheta) N \phi(-1),$$

$$f(\vartheta, \phi) = (\tau^* + \vartheta) (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16})^T \quad (10)$$

其中, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6)^T \in C, f_{1i} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 分别表示非线性项。

$$M = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & 0 & 0 & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{44} & -1 & J_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0.008 & -0.0064 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 W(\varphi^*) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据Riesz定理^[19],存在有界变差函数 $\eta(\theta, \vartheta)$,

$\theta \in [-1, 0]$ 使得: $L_\vartheta \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \vartheta) \phi(\theta), \phi \in C([-1, 0], R^6)$ 。

选取 $\eta(\theta, \vartheta) = (\tau^* + \vartheta) M \delta(\theta) - (\tau^* + \vartheta) N \delta(\theta + 1)$, 定义:

$$\Lambda(\vartheta)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \vartheta)\phi(\theta), & \theta = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\Delta(\vartheta)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ f(\theta, \vartheta), & \theta = 0 \end{cases}$$

即式(9)等价于:

$$\dot{x}_t = \Lambda(\vartheta)x_t + \Delta(\vartheta)x_t, x_t(\theta) = x(t + \theta) \quad (13)$$

对于 $\Psi \in C^1([0, 1], (R^6)^*)$, $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$, 定义 Λ^* 和双线性内积如下所示:

$$\Lambda^*\Psi = \begin{cases} -\frac{d\Psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, 0)\Psi(-t), & s = 0 \end{cases}$$

$$\langle \Psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\Psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{\Psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \quad (14)$$

其中, Λ^* 是 $\Lambda(0)$ 的伴随线性算子, 显然, $\pm i\omega^*\tau^*$ 是 Λ^* 的特征根。设 $\Lambda(0)q(\theta) = i\omega^*\tau^*q(\theta)$, $\Lambda^*(0)q^*(s) = -i\omega^*\tau^*q^*(s)$, 同时令 $q(\theta) = (1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T e^{i\omega^*\tau^*\theta}$, $q^*(s) = G(1, v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*, v_5^*)^T e^{i\omega^*\tau^*s}$, 即有:

$$\begin{aligned} \tau^*Mq(0) + \tau^*Nq(-1) &= i\omega^*\tau^*q(0) \\ \tau^*M^Tq^*(0) + \tau^*N^Tq^*(-1) &= -i\omega^*\tau^*q^*(0) \end{aligned} \quad (15)$$

由式(15)可求得 $v_r, v_r^* (r = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的表达式, 由式(14)可求得:

$$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = \bar{G} \left(1 + \sum_{r=1}^5 v_r \bar{v}_r^* + \tau^* e^{-i\omega^*\tau^*} (A_4 v_3 + D_1 \bar{v}_3^*) \right) \quad (16)$$

为满足 $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$, $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$, 选择 \bar{G} 为:

$$\bar{G} = \left(1 + \sum_{r=1}^5 v_r \bar{v}_r^* + \tau^* e^{-i\omega^*\tau^*} (A_4 v_3 + D_1 \bar{v}_3^*) \right)^{-1} \quad (17)$$

依据 Hassard 方法^[20], 即可计算出当 $\vartheta = 0$ 时, 中心流形 C_0 的坐标 $g_{02}, g_{11}, g_{20}, g_{21}$, 并且 $W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\omega^*\tau^*} q(0) e^{i\omega^*\tau^*\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega^*\tau^*} \bar{q}(0) e^{-i\omega^*\tau^*\theta} + U_1 e^{2i\omega^*\tau^*\theta}$,

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\omega^*\tau^*} q(0) e^{i\omega^*\tau^*\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega^*\tau^*} \bar{q}(0) e^{-i\omega^*\tau^*\theta} + U_2,$$

其中:

$$U_1 = 2(2\lambda E - M - e^{-2i\omega^*\tau^*} N)^{-1} (p_{03}, \bar{v}_1^* p_{02}, 0, \bar{v}_3^* p_{01}, 0, 0)^T,$$

$$U_2 = -(M + N)^{-1} (p_{06}, \bar{v}_1^* p_{05}, 0, \bar{v}_3^* p_{04}, 0, 0)^T.$$

即可得到下列值:

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega^*\tau^*} \left(g_{11} g_{20} - 2g_{11}^2 - \frac{g_{02}^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}$$

$$\begin{aligned} \chi_2 &= -\frac{\operatorname{Re} C_1(0)}{\operatorname{Re} \lambda'(\tau^*)} \\ \beta_0 &= 2\operatorname{Re} C_1(0) \\ T_2 &= \frac{\operatorname{Im} C_1(0) + \chi_2 \operatorname{Im} \lambda'(\tau^*)}{-\omega^*\tau^*} \end{aligned} \quad (18)$$

以上参数中, χ_2 决定 Hopf 分岔的方向: 如果 $\chi_2 > 0$, Hopf 分岔是超临界分岔; 如果 $\chi_2 < 0$, Hopf 分岔是亚临界分岔; 且 $\tau > \tau^* (\tau < \tau^*)$ 时分岔周期解存在; β_0 决定了分岔周期解的稳定性: 如果 $\beta_0 < 0 (\beta_0 > 0)$, 分岔周期解是稳定的 (不稳定的); T_2 决定了分岔周期解的周期: 如果 $T_2 > 0 (T_2 < 0)$, 分岔周期是递增的 (递减的)。

4 数值模拟

在数值计算过程中, 系统参数具有高度的敏感性, 即系统(1)的膜电位会随着参数的变化呈现出不同的放电模式。本文所研究的膜电位为 ML 神经元膜电位 V_1 。为了得到更为精确的研究结果, 以双参数 V_k 和 γ 作为变量, 取系统其它各参数值分别为: $C_m = 1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$, $g_{\text{Ca}} = 1.2 \text{ ms}/\text{cm}^2$, $g_{\text{K}} = 2.0 \text{ ms}/\text{cm}^2$, $g_{\text{L}} = 0.5 \text{ ms}/\text{cm}^2$, $V_{\text{Ca}} = 1 \text{ mV}$, $V_{\text{L}} = -0.55 \text{ mV}$, $I_{\text{ext}} = 0 \text{ mA}/\text{cm}^2$, $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\alpha = 1.3$, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.58$, $k_3 = 0.5$, $m_{11} = -0.01 \text{ mV}$, $m_{22} = 0.15 \text{ mV}$, $m_{33} = 0.1 \text{ mV}$, $m_{44} = 1.55 \text{ mV}$ 。在双参数平面 $V_k \in [1.2, 6]$, $\gamma \in [0.062, 0.068]$ 上, 绘制不同时滞作用下相应的双参周期分岔图 (图 1), 图 1 中不同的颜色对应着不同的周期簇放电态, 右边颜色栏的数值对应着相应的周期簇放电态 (如数字 5 对应周期 5 簇放电态, 数字 10 对应周期 10 簇放电态, 白色区域对应大于或等于 20 的周期簇放电态或者混沌放电态)。

当 $V_k \in [1.00, 1.65]$, $\gamma \in [0.062, 0.0638]$ 时, 观察图 1a 发现, 随着 V_k 的逐渐增大, 膜电位由周期 2 簇放电态通过加周期 2 分岔进入周期 4, 6, 8... 通向“梳状”的混沌放电区域。图 1b 与图 1a 相比, 加周期分岔的周期数减少, 此现象在图 1c 中更为显著, 其直接由周期 2 簇放电态进入混沌态, 加周期分岔消失。这说明时滞 τ 的改变影响了系统(1)的放电模式。

当 $V_k \in [1.65, 2.60]$, $\gamma \in [0.062, 0.068]$ 时, 观察图 1a 中黑线从右上到左下的走势发现, 膜电位首先由混沌态进入周期 8 窗口, 再通过逆倍周期分岔^[21]进入周期 4 窗口, 之后通过加周期分岔进入大范围的周期 5 窗口, 随后通过倍周期分岔再次通向混沌态, 接着继续进入周期 7 窗口同样经过倍周期分岔又一次进入混沌态... 这样一直重复着前面的放电模式, 最终趋向于周期 2 簇放电态。同时, 当倍周期分岔与混沌交替出现时, 每次混沌放电后的周期要比混沌放电前大 2, 当周期数不断变大时, 相应的颜色带逐渐变窄, 且混沌窗口也逐渐变

小。此外图1b和图1c也存在类似的现象。而图1b与图1a相比,混沌放电区域减小,其图1c则以周期放电为主。图1b与图1a相比,原本周期7、9、11、13、15窗口分别有8、10、12、14、16窗口混入,而图1c与图1b相比,混

入的窗口明显增大,说明时滞 τ 使系统(1)本该在上一周期的放电模式延迟至下一周期,从而形成了固定颜色带中有多种颜色混合的现象,且时滞 τ 越大,混入的颜色带区域越大。

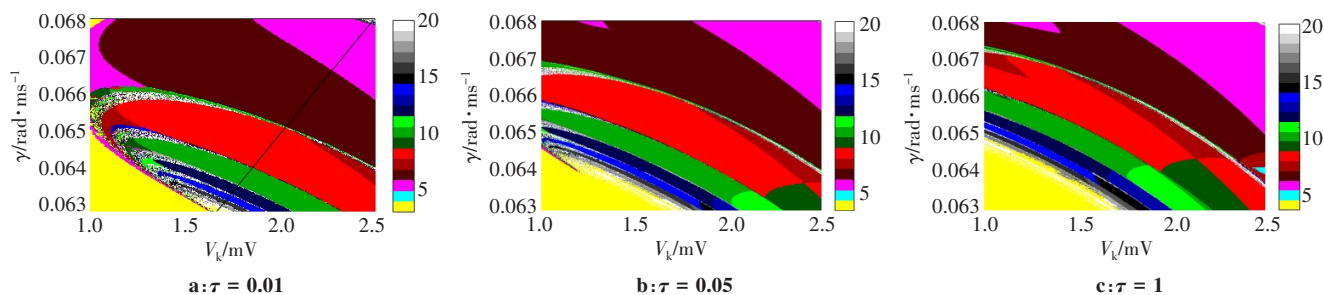


图1 膜电位在不同时滞 τ 下的双参周期分岔图

Fig.1 Two-parameter periodic bifurcation diagrams of membrane potential with different time delays τ

保持参数 $V_k = 1.6$ 不变,绘制不同时滞作用下以 γ 为单参的峰峰间期(ISI)分岔图(图2)。观察图2a发现,随着参数 γ 的减小,膜电位由周期5窗口经倍周期分岔通向混沌态,之后进入周期7窗口经倍周期分岔又一次通向混沌态,随后进入周期9窗口经倍周期分岔再次通向混沌态…这样一直重复着前面的放电

模式,最终趋向于无混沌的周期放电。而图2b与图2a相比,通向的混沌区域减小,同时每次出现混沌放电时, γ 的值增大,其图2c更大程度地反映出这一现象。这表明随着时滞 τ 不同程度的增大,放电模式出现了不同程度的延迟。

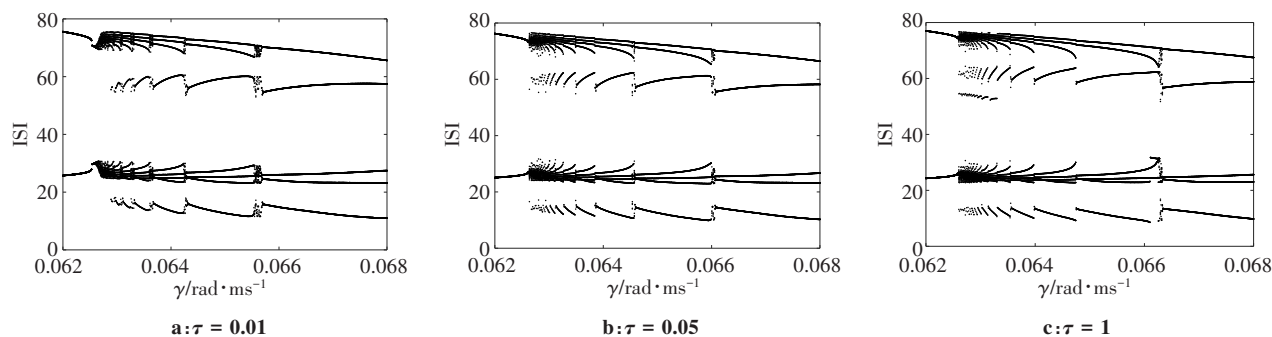


图2 膜电位在不同时滞 τ 下的单参分岔图

Fig.2 Single-parameter bifurcation diagrams of membrane potential with different time delays τ

5 结束语

本文基于ML和FHN神经元模型,构建时滞作用下忆阻耦合FHN-ML神经元模型,分析该神经元系统在不同时滞作用下的动力学行为。利用Routh-Hurwitz判据和Hopf分岔定理证明FHN-ML神经元系统的平衡点对于 $\tau \in [0, \tau^*)$ 是局部渐近稳定的;对于 $\tau > \tau^*$ 是不稳定的;当 $\tau = \tau^*$ 时,FHN-ML神经元系统在平衡点处存在Hopf分岔。利用范式理论和中心流形定理进一步证明 χ_2 决定Hopf分岔的方向; β_0 决定分岔周期解的稳定性; T_2 决定分岔周期解的周期。通过绘制在不同时滞作用下以反转电压 V_k 和电流频

率 γ 为双参的周期分岔图发现,随着时滞 τ 的增大,FHN-ML神经元系统膜电位混沌放电区域减小,加周期分岔的周期数减小。同时由于时滞 τ 使本该在上一周期的放电模式延迟至下一周期,出现了固定周期窗口混入了其他周期窗口的现象,且时滞 τ 越大,混入的周期窗口越大。通过绘制在不同时滞作用下以电流频率 γ 为单参的峰峰间期(ISI)分岔图发现,FHN-ML神经元系统混沌放电区域随着时滞 τ 的增大而减小,这与上述放电模式的分析结果相似,同时放电模式也会随着时滞 τ 的增大而产生延迟现象,且在不同时滞的影响下,产生不同程度的延迟。

综上所述,时滞是影响FHN-ML神经元系统放电模式的重要因素,所得研究成果对在电磁辐射作用下具有延迟效应的耦合神经网络动力学的研究具有极大的参考价值。

【参考文献】

- [1] HODGKIN A L, HUXLEY A F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve[J]. *J Physiol*, 1952, 117(4): 500-544.
- [2] FITZHUGH R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane[J]. *Biophys J*, 1961, 1(6): 445-446.
- [3] BAUTIN A N. Qualitative investigation of a particular nonlinear system[J]. *J Appl Math Mech*, 1975, 39(4): 606-615.
- [4] 杨雨澧, 刘深泉. FHN-ML电耦合神经元的发放模式和分岔分析[J]. *中国医学物理学杂志*, 2017, 34(3): 306-313.
YANG Y T, LIU S Q. FHN-ML electric coupling neurons distribution pattern and bifurcation analysis[J]. *Chinese Journal of Medical Physics*, 2017, 34(3): 306-313.
- [5] 谢一丁, 王征平, 刘帅. 复杂网络上耦合神经系统的非聚类相同步[J]. *应用数学和力学*, 2020, 41(6): 627-635.
XIE Y D, WANG Z P, LIU S. Complex coupling neural system on the network of clustering phase synchronization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 41(6): 627-635.
- [6] YAMAKOU M E, JOST J. Control of coherence resonance by self-induced stochastic resonance in a multiplex neural network[J]. *Phys Rev E*, 2019, 100: 022313.
- [7] WANG H X, ZHENG Y H, LU Q S. Stability and bifurcation analysis in the coupled HR neurons with delayed synaptic connection[J]. *Nonlinear Dynam*, 2017, 88(3): 2091-2100.
- [8] MAO X C. Complicated dynamics of a ring of nonidentical FitzHugh-Nagumo neurons with delayed couplings[J]. *Nonlinear Dynam*, 2017, 87(4): 2395-2406.
- [9] 洪懿暄, 杨翼铭, 周爽, 等. 电刺激神经元构成的时滞网络间的耦合同步[J]. *光电技术应用*, 2019, 34(1): 50-72.
HONG Y X, YANG Y M, ZHOU S, et al. Coupling synchronization between delay neurons networks with electrical stimulation[J]. *Application of Photoelectric Technology*, 2019, 34(1): 50-72.
- [10] STRUKOV D B, SNIDER G S, STEWART D R, et al. The missing memristor found[J]. *Nature*, 2008, 453(7191): 80-83.
- [11] ZHANG J H, LIAO X F. Effects of initial conditions on the synchronization of the coupled memristor neural circuits[J]. *Nonlinear Dynam*, 2019, 95(2): 1269-1282.
- [12] 杨腾云, 李新颖, 高月月. 电磁辐射下神经元放电模式及其环状耦合同步转迁[J]. *四川大学学报(自然科学版)*, 2021, 58(1): 109-116.
YANG T Y, LI X Y, GAO Y Y. Firing patterns and synchronous transition of ring-coupled neurons under electromagnetic radiation[J]. *Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)*, 2021, 58(1): 109-116.
- [13] 乔帅, 安新磊, 王红梅, 等. 磁通e-HR神经元隐藏放电与分岔行为的研究[J]. *云南大学学报(自然科学版)*, 2020, 42(4): 685-694.
QIAO S, AN X L, WANG H M, et al. Hidden discharge and bifurcation behavior of magnetic flux e-HR neurons[J]. *Journal of Yunnan University (Natural Sciences Edition)*, 2020, 42(4): 685-694.
- [14] MORRIS C, LECAR H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber[J]. *Biophys J*, 1981, 35(1): 193-213.
- [15] AL-HUSSEIN A-B A, RAHMA F, JAFARI S. Hopf bifurcation and chaos in time-delay model of glucose-insulin regulatory system[J]. *Chaos Soliton Fract*, 2020, 137: 109845.
- [16] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 43-47.
LIU B Z, PENG J H. *Nonlinear dynamics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2004: 43-47.
- [17] 张家忠. 非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2010: 88-121.
ZHANG J Z. *Dynamic stability of nonlinear dynamical systems, bifurcation theory and its applications* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2010: 88-121.
- [18] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 15-37.
LIAO X X. *Stability theory and application of dynamic systems* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000: 15-37.
- [19] NARITA K, NAKASHO K, SHIDAMA Y F. Riesz theorem [J]. *FormalizMath*, 2017, 25(3): 179-184.
- [20] HASSARD B, WAN Y H. Bifurcation formulae derived from center manifold theory[J]. *J Math Anal Appl*, 1978, 63(1): 297-312.
- [21] 余文慧, 高仕龙. 二维随机耦合Logistic映射的混沌特征[J]. *四川大学学报(自然科学版)*, 2019, 56(4): 581-587.
YU W H, GAO S L. Chaotic characteristics of two dimensional random coupled Logistic map[J]. *Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)*, 2019, 56(4): 581-587.

(编辑:陈丽霞)