第36卷 第12期 2019年 12月

Vol. 36 No.12 December 2019

DOI:10.3969/j.issn.1005-202X.2019.12.020

医学信号处理与医学仪器

# 俯卧式脊柱康复训练仪运动学建模与分析

王固兵,徐秀林,刘吉永,胡秀枋,丁瑞丰 上海理工大学医疗器械与食品学院,上海 200093

【摘要】为了改善现有脊柱康复训练设备的功能单一、结构复杂、训练模式不合理的现状。本研究通过对人体爬行运动进行建模,实现新型智能脊柱康复训练仪的设计。用 Denavit-Hartenberg 法对爬行训练仪进行运动学建模,得到其正逆运动学方程。使用 MATLAB 建模软件在预设康复轨迹下进行运动学仿真实验,对运动学求解进行验证。实验结果表明,脊柱康复训练仪能在预定轨迹下按爬行训练的要求运动,验证了脊柱康复训练仪结构设计的合理性。同时,由机械把手位置信息通过逆运动学方程计算得到的各关节的角度误差最大不大于3°,验证了所得运动学方程的有效性。

【关键词】脊柱康复训练仪;Denavit-Hartenberg法;爬行训练;运动学建模;Matlab仿真

【中图分类号】R318;R49

【文献标志码】A

【文章编号】1005-202X(2019)12-1466-06

## Kinematics modeling and analysis of prone spine rehabilitation training instrument

WANG Gubing, XU Xiulin, LIU Jiyong, HU Xiufang, DING Ruifeng

School of Medical Instrument and Food Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China

Abstract: In order to solve the problems of simple function, complex structure and unreasonable training mode of the existing spine rehabilitation training equipment, a novel intelligent spine rehabilitation training instrument realized by modeling human crawling movements is designed in the study. The kinematics modeling of the crawling training instrument is carried out by Denavit-Hartenberg method, and its forward and inverse kinematics equations are obtained. The kinematics simulation experiment is carried out under the preset rehabilitation trajectory using MATLAB modeling software to verify the kinematics solutions. The experimental results show that the spine rehabilitation training instrument can move according to the requirements of crawling training under the predetermined trajectory, which verifies the rationality of the structural design of the spine rehabilitation training instrument. Meanwhile, the angular error of each joint calculated by the inverse kinematics equation from the position information of the mechanical handle is no more than 3°, which verifies the validity of the obtained kinematic equations.

**Keywords:** spine rehabilitation training instrument; Denavit-Hartenberg method; crawling training; kinematics modeling; Matlab simulation

#### 前言

随着生活节奏的加快,电脑以及智能手机的广泛应用,颈椎及脊柱的发病率逐年增加[1]。研究显示,30岁以下的脊柱疾病发病率呈快速增长的趋势,脊柱疾病不再只是中老年人的常见病,而是越来越趋于年轻化[2-3]。儿童青少年中最常见的脊柱畸形在10~16岁年龄段的发病率高达2%~3%,女生占80%[4-5]。脊柱具有支持躯干、保护内脏、保护脊髓和

【收稿日期】2019-07-09

【基金项目】上海市科学技术委员会科研计划项目(15441906200)

【作者简介】王固兵,硕士研究生,研究方向:康复医疗器械,E-mail: gbwang2016@163.com

【通信作者】徐秀林,教授,研究方向:医疗器械的开发及医疗器械检测技术,E-mail:xxlin100@163.com

进行运动的功能。因此,对脊柱的康复治疗非常迫切。

脊柱康复的传统方法是牵引和手术治疗等<sup>[6-8]</sup>。研究显示,爬行运动对于脊柱疾病的康复有着良好的效果<sup>[9-10]</sup>。此前,已有爬行训练器开始走向市场,但大多数的爬行训练器功能低下,只能实现单一的主动爬行运动,无法实现被动的运动并对运动进行定量的评估分析<sup>[11-12]</sup>。虽然也有些被动训练装置,但大多数是采用固定电机速度和距离的方式,不能针对不同病情的病人提供定制化的服务<sup>[13-16]</sup>。

针对现有设备的不足,本研究研制了一款脊柱康复训练仪。训练时,设备床体由电机升起,患者双手放在扶手上,双脚放在脚踏板上;根据患者的体型调节腹部的前后和上下位置;最后,把患者膝部放在膝关节垫子上合适的位置,进行主动或者被动训练。

主动训练时,由患者拉动训练把手进行同步和交替运动;被动训练时,由手部驱动电机带动手和下肢进行同步和交替运动,矫正训练由安装在尾部的步进电机带动患者进行侧弯训练。

#### 1 脊柱爬行训练仪的结构

本研究研制的脊柱康复训练仪如图1所示,其整体结构设计方案是由脊柱康复训练仪的前部驱动电机通过连杆与锥齿轮的作用,最终将作用力输出到上肢的腕关节、肘关节以及肩关节。同时,膝垫通过传送带和前部电机相连,对膝关节施加作用力。因此,通过前部的驱动电机可以完成运动所需的肩关节、肘关节、胯关节和膝关节的屈伸运动。为符合人因工程学要求,该装置腹部高度可调节范围为15~25 cm,把手移动范围为80~160 cm,肩关节活动角度范围为45°~135°,肘关节屈伸角度范围为0°~90°。



图 1 育在床麦训练区
Fig.1 Spine rehabilitation training instrument

### 2 运动学建模

本研究针对该设备的运动要求,采用 Denavit-Hartenberg(D-H)法对爬行训练仪进行运动学建模,得到其正逆运动学方程。使用 MATLAB 建模软件进行建模,并让其在预设康复运动轨迹下进行运动学仿真实验,对使用 D-H 法求解的运动学结果进行验证。

脊柱康复训练仪可以通过前部驱动电机的带动实现平面内线性运动,从而实现上肢和下肢在平面内的运动训练需求。采用D-H法对爬行运动建模时,首先把肢体每一个部分设为一个杆件并为其指定一个本地的参考坐标系,然后为每个关节建立一个z轴和x轴<sup>[17-19]</sup>。得到脊柱康复训练仪的杆件坐标系后,根据一系列相邻坐标系之间的变换,从腹部保护装置的基座开始,直至变换到训练仪把手。这种变换关系可由4个齐次变换矩阵来描述,此关系式表示为:

$$_{i}^{i-1}T =$$

Rot $(z,\theta_i)$ Trans $(0,0,d_i)$ Trans $(a_{i-1},0,0)$ Rot $(x,\alpha_{i-1})$  (1) 其中, $i^{-1}$ **T**代表关节矩阵; $\theta_i$ 为绕 $z_{i-1}$ 轴的旋转角; $d_i$ 为在 $z_{i-1}$ 轴上两条相邻公垂线之间的距离; $\alpha_{i-1}$ 为每一条公垂线的长度; $\alpha_{i-1}$ 为两相邻z轴之间的夹角。本研究以脊柱爬行训练仪的机械结构为研究对象,由于在运动过程中均以腹部为支点,上肢和下肢做同样的运动,故仅对上肢的运动进行建模分析,得到的杆件坐标关系如图 2 所示,图中 $\theta_1$ 为肩关节旋转角度, $\theta_2$ 为肘关节旋转角度, $\theta_3$ 为腕关节旋转角度, $l_1$ 为机体长度, $l_2$ 为上臂长度, $l_3$ 为小臂长度, $l_4$ 为手掌长度, $l_{c1}$ 为机体质心长度, $l_{c2}$ 为上臂质心长度, $l_{c2}$ 为小臂质心长度, $l_{c3}$ 为小臂质心长度, $l_{c4}$ 为手掌质心长度。得到的杆件和关节参数见表 1。

#### 2.1 正运动学方程求解

把式(1)中的 $_{i}^{i-1}$ **T**展开得:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{i} & -\sin\theta_{i} & 0 & \alpha_{i-1} \\ \sin\theta_{i} & \cos\theta_{i}\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_{i}\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_{i}\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_{i}\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_{i}\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(2)

将杆件参数代人式(2),可得其次坐标变化矩阵  ${}^{0}_{1}T_{,2}{}^{1}T_{,3}{}^{2}T_{,4}{}^{3}T_{,}$  将以上各杆件变化矩阵相乘,得到各坐标系相对基坐标系的变化矩阵  ${}^{0}_{2}T_{,3}{}^{0}T_{,4}{}^{0}T_{,}$  并将  $\sin(\theta_{1}+\theta_{2}+\theta_{3}),\cos(\theta_{1}+\theta_{2}+\theta_{3})$  缩写为  $s_{1+2+3},c_{1+2+3}$ 。则手臂末端位置如式(3)所示:

$$\begin{cases}
p_x = l_1 + l_2c_1 + l_3c_{1+2} + l_4c_{1+2+3} \\
p_y = l_2s_1 + l_3s_{1+2} + l_4s_{1+2+3} \\
p_z = 0
\end{cases}$$
(3)

肩关节内收外展、肩关节屈伸以及肘关节屈伸 角度值分别为:

$$\begin{cases} \theta_1 = -\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{\pi}{6} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \theta_3 = -\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$(4)$$

由式(3)和式(4)可知,当已知各关节运动角度时,可以对手部腕关节的位置进行求解。运用MATLAB可以求得装置把手在基坐标轴上相对时间的轨迹如图3所示。

#### 2.2 逆运动学方程求解

在已知手臂末端运动轨迹时,可求解出关节  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 的大小。相对于基坐标系 $x_0y_0z_0$ ,手臂执行末端坐标系 $x_4y_4z_4$ 是由 $x_0y_0$ 绕 $z_0$ 旋转 $\varphi$ 得到的,由此可以得到式(5)。

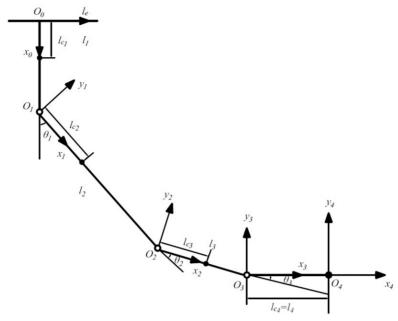


图 2 上肢 Denavit-Hartenberg 矩阵坐标系

Fig.2 Upper-limb Denavit-Hartenberg matrix coordinate system

表 1 4种 Denavit-Hartenberg 变量在上肢部分的表示 Tab.1 Representations of 4 Denavit-Hartenberg variables in the upper limbs

美节 <i>i</i>	$a_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_{i}$	运动范围
1	$l_1$	0	0	$\theta_1$	51°~135°
2	$l_2$	0	0	$\theta_{2}$	30°~90°
3	$l_3$	0	0	$\theta_3$	0°~45°
末端	$l_4$	0	0	0	0°

$$\begin{cases} n_x = \cos(x_0, x_4) = \cos(\varphi) \\ n_y = \cos(y_0, x_4) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin(\varphi) \\ o_x = \cos(y_0, y_4) = \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin(\varphi) \\ o_y = \cos(y_0, y_4) = \cos(\varphi) \\ a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{cases}$$
 (5)

所以末端相对于基坐标的位姿矩阵为:

$$T_{4} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & p_{x} \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & p_{y} \\ 0 & 0 & 1 & p_{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 (6)

由  $T_4 = {}^0_4 T$ 可得:

$$\begin{cases} p_{x} = l_{1} + l_{2}c_{1} + l_{3}c_{1+2} + l_{4}\cos(\varphi) \\ p_{y} = l_{2}s_{1} + l_{3}s_{1+2} + l_{4}\sin(\varphi) \\ p_{z} = 0 \end{cases}$$
 (7)

所以由式(7)解得:

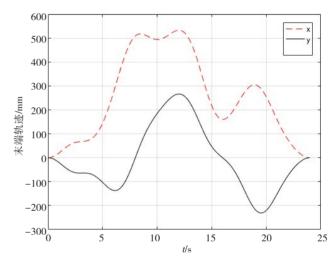


图3 运动学模型末端轨迹

Fig.3 Trajectories of kinematic model ends

$$\theta_3 = \arccos \frac{A^2 + B^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$
 (8)

式(8)中

$$A = p_{x} - l_{1} - l_{4}\cos(\varphi), B = p_{y} - l_{4}\sin(\varphi)$$
 (9)

 $\sqrt{1-H^2}$ ,将其代入式(7)可得:

$$\sin(\theta_1) = \frac{B(l_2 + l_3 H) - Al_3 \sqrt{1 - H^2}}{(l_2 + l_3 H)^2 + l_3^2 (\sqrt{1 - H^2})} = m(10)$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{A(l_2 + l_3 H) - Al_3 \sqrt{1 - H^2}}{(l_2 + l_3 H)^2 + l_3^2 (\sqrt{1 - H^2})} = n \quad (11)$$

联合式(10)和(11),可得:

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan\left(\frac{m}{n}\right) \\ \theta_2 = \arccos\left(\frac{A^2 + B^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}\right) \\ \theta_3 = \varphi - \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$
 (12)

由式(12)可计算出脊柱康复训练仪在任何期望 位置时的关节角度值。

## 3 脊柱康复训练仪轨迹规划

使用D-H矩阵算出正解与逆解后,利用MATLAB 进行模拟与仿真。模型的建立是MATLAB模拟的关键, 使用MATLAB中的Robotics Toolbox工具箱可实现脊 柱爬行模型的建立。该模型是使用D-H法模拟连杆和 关节的数据矩阵实现建立的。可以通过构建杆件间关 系实现脊柱康复训练仪运动轨迹的规划,模拟人体真 实爬行运动状态。在Robotics Toolbox 中使用D-H方法 求得参数  $L = \text{Link}([\alpha, A, \theta, D])$ ,其中的  $\alpha, A, \theta, D$ 与D-H矩阵的  $\alpha$ , A,  $\theta$ , D ——对应。利用工具箱中的Link 函数创建机械结构的各连杆[20]; α代表了连杆之间的扭 转角,以 $\pi$ 为单位;A代表杆与杆之间的距离; $\theta$ 代表连 杆之间的夹角,以 $\pi$ 为单位:D代表杆的长度。

其中各关节的数值是根据我国人体标准选定, 代码如下:

L(1)=Link([0 50 0 0])

 $L(2)=Link([0\ 0\ 45\ \pi/2])$ 

L(3)=Link([0 19 85 0])

 $L(4) = Link([0\ 0\ 25.3\ 0])$ 

L(5)=Link([0 0 0 0]) //六个杆的建模

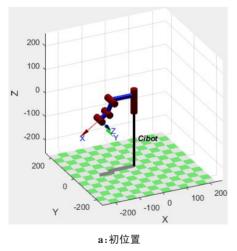
L(1)代表训练仪床体到腹部保护托架部分,设置 高度为50 cm:L(2)代表腹部到肩关节部分长度,设置 为45 cm,与腹部保护托架呈π/2的角度,即与地面水 平;L(3)代表肩宽,设置为19.85 cm,为正常的一半;L (4)代表手臂的大臂,长为33.3 cm;L(5)代表手臂的小 臂,长25.3 cm;L(6)是手部位置的一个坐标系,无实 际长度。

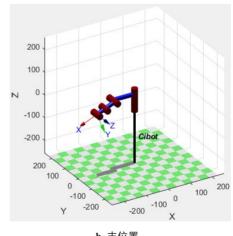
运用SerialLink语句将之前所建立的杆连接成首 尾相接的状态。具体如下:

aibot=SerialLink(L, 'name', 'aibot');//建立 aibot  $qa = [00\pi/2\pi/7\pi/60]$ ://设置初始位置的角度 qb=[00π/2π/800];//设置末端位置的角度 *t*=[0:0.1:2];//时间函数

[q1, qd1, qdd1]=itraj(qa, qb, t);//关节轨迹规划 T=fkine(aibot, q);//运动学正解轨迹

 $qa=[00\pi/2\pi/7\pi/60]$ 表示一个六参数矩阵,和6个 杆一一对应,并且给每个杆赋予一个规定的夹角。t=[0:0.1:2 ]代表一个时间向量,2s内,以0.1s为一个采样间 隔。[q1, qd1, qdd1]=jtraj(qa, qb, t)是关节的空间规划表 述形式,将轨迹的位移、速度以及加速度表达出来[21]。 通过仿真可得预设三维脊柱康复运动轨迹的始末位置, 如图4所示。根据脊柱康复训练仪手柄末端的 $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$ 的位置大小和式(12),得到各时刻 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 的大小, 将求出的 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 与运动仿真中的测量得到的各关 节角度进行比较,结果如图5所示。





b:末位置

图 4 仿真运动轨迹始末位置

Fig.4 Simulation motion track beginning and end positions

从图5可以看出, $\theta_1$ 的运动范围为55°~135°, $\theta_2$ 的运 动范围为30°~90°,θ,的运动范围为22.5°~25.0°,θ,、θ,、  $\theta$ ,的运动范围满足表1中各关节对应的活动范围。由 图5可以看出,通过逆运动学方程计算的 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 与仿 真直接得到的各关节角度基本相同,且计算得到的角 度值与测量得到的角度值最大误差不超过3°。

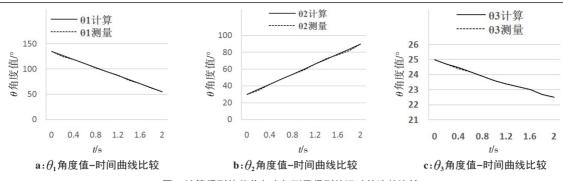


图 5 计算得到的关节角度与测量得到的运动轨迹的比较

Fig.5 Comparison of the calculated joint angles and the measured motion trajectories

# 4 结 论

本研究设计的爬行训练模型为脊柱疾病患者进行康复训练提供了运动算法的依据,所设计的脊柱康复训练仪可以有效地对脊柱进行训练,达到康复的效果。通过D-H 法建立了关节坐标系,求解出运动学模型,得到了训练需要的位置方程。在建立的MATLAB模型中对关节输入位置信号,得到末端运动轨迹,对比所建立数学模型求出的轨迹和物理模型轨迹,验证了运动学正解的正确性,并对装置进行逆运动学计算,对求得的角度进行仿真验证。该研究结果可以为制定个性化脊柱康复训练方案提供科学的参考依据,建立的爬行模型也可以为脊柱疾病的康复训练提供理论支持。

# 【参考文献】

- [1] 孙青, 乔琼, 张晓燕. 颈椎病功能锻炼疗法的研究进展[J]. 上海护理, 2012, 12(2): 65-67.
  - SUN Q, QIAO Q, ZHANG X Y. Research progress on functional exercise therapy for cervical spondylosis [J]. Shanghai Nursing Journal, 2012, 12(2): 65-67.
- [2] 刘雅丽,黄晓玲. 儿童青少年脊柱侧弯的筛选方法(综述)[J]. 中国康复,2002,17(1):46-47.
  - LIU Y L, HUANG X L. Screening method for scoliosis in children and adolescents [J]. Chinese Journal of Rehabilitation, 2002, 17(1): 46-47.
- [3] 潘志超,徐秀林. 爬行训练及爬行训练装置在脊椎病康复治疗中的应用[J]. 生物医学工程学进展, 2014, 35(4): 223-227.
  - PAN Z C, XU X L. Application of crawling training and crawling training devices in rehabilitation for spinal disease [J]. Progress in Biomedical Engineering, 2014, 35(4): 223-227.
- [4] SEKHON L H, FEHINGS M G. Epidemiology, demographics, and pathophysiology of acute spinal cord injury [J]. Spine (Phila Pa 1976), 2001. 26(24): 2-12.
- [5] 徐朝辉. 夹脊穴为主的辨经施治在神经根型颈椎病中的疗效分析 [J]. 按摩与康复医学, 2016, 7(7): 37-38.
  - XU Z H. Therapeutic effect of Jiaji acupoint-based differentiation and treatment in cervical spondylotic radiculopathy [J]. Chinese Manipulation & Rehabilitation Medicine, 2016, 7(7): 37-38.
- [6] 邓贵兴. 规范脊柱侧凸的手术治疗, 提高脊柱侧凸的矫治水平[J]. 脊柱外科杂志, 2004, 2(5): 257-258.
  - QIU G X. Standardize the surgical treatment of scoliosis and improve

- the correction level of scoliosis [J]. Journal of Spinal Surgery, 2004, 2(5): 257-258.
- [7] 陈威烨, 王辉昊, 梁飞凡, 等. 牵引治疗颈椎病的研究进展[J]. 中国 康复医学杂志, 2016, 31(5): 599-601.
  - CHEN W Y, WANG H H, LIANG F F, et al. Research progress in traction treatment of cervical spondylosis [J]. Chinese Journal of Rehabilitation Medicine, 2016, 31(5): 599-601.
- [8] 吴坤芳, 余永壮, 周继权, 等. 脊髓型颈椎病的诊疗进展[J]. 现代医学与健康研究电子杂志, 2018, 2(13): 197-198. WU K F, YU Y Z, ZHOU J Q, et al. Progress in the diagnosis and
  - treatment of cervical spondylotic myelopathy [J]. Modern Medicine and Health Reserarch, 2018, 2(13): 197-198.
- [9] 肖阳,徐秀林.基于爬行运动的脊柱康复训练仪的设计[J]. 生物医学工程研究, 2017, 36(1): 77-82.
  - XIAO Y, XU X L. Design of spinal rehabilitation training instrument based on crawling movement [J]. Journal of Biomedical Engineering Research, 2017, 36(1): 77-82.
- [10] 易红梅, 余梅英, 林秋. 探究爬行运动的防病健身机制[J]. 中国实用医药, 2008, 3(6): 136-137.
  - YI H M, YU M Y, LIN Q. Exploring the disease prevention and fitness mechanism of crawling [J]. China Practical Medical, 2008, 3(6): 136-137.
- [11] TIDWELL J H. Physical coordination training device: US, 3976058 [P]. 1976-08-24.
- [12] IAMS J F, SPLANE R L, DRUSCH J A. Device permitting a user to simulate crawling motions to improve movement of the truncal muscles and spine: US, 4799475[P]. 1989-01-24.
- [13] CANELA H. Exercise device for handicapped children: US, 5407406 [P]. 1995-04-18.
- [14] 党礌, 陈仲强, 刘晓光, 等. 青少年下腰椎间盘突出症的病因分析—— 腰椎过度承载及腰骶部骨与关节形态变异在发病中的意义[J]. 中 国脊柱脊髓杂志, 2015, 25(11): 991-996.
  - DANG L, CHEN Z Q, LIU X G, et al. Etiology of lumbar disc herniation in adolescents: excessive load on the lumbar spine and aberrant configurations of the lumbosacral region [J]. Chinese Journal of Spine and Spinal Cord, 2015, 25(11): 991-996.
- [15] DEVIVO M J, KRAUSE J S, LAMMERTSE D P. Recent trends in mortality and causes of death among persons with spinal cord injury [J]. Arch Phys Med Rehabil, 1999, 80(11): 1411-1419.
- [16] 尤爱民, 雷万军, 崔永光, 等. 支具在创伤后肘关节功能障碍治疗中的作用[J]. 中国康复医学杂志, 2009, 24(9): 856-857.
  - YOU A M, LEI W J, CUI Y G, et al. The role of brace in the treatment of post-traumatic elbow joint dysfunction [J]. China Journal of Rehabilitation Medicine, 2009, 24(9): 856-857.
- [17] 李鹏, 多工业机器人圆环链生产线开发及轨迹规划与仿真研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2018.

- LI P. Development of industrial robot-based production line for round-link China and robot trajectory planning and simulation [D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2018.
- [18] 易金花, 喻洪流, 张颖, 等. 中央驱动式上肢康复机器人运动学建模与分析[J]. 生物医学工程学杂志, 2015, 32(6): 1196-1201. YI J H, YU H L, ZHANG Y, et al. Kinematics modeling and analysis of central-driven robot for upper limb rehabilitation after stroke[J]. Journal of Biomedical Engineering, 2015, 32(6): 1196-1201.
- [19] 高大地, 邹任玲. 空间运动轨迹爬行训练装置的设计[J]. 中国康复理论与实践, 2018, 24(4): 477-482.
  - GAO D D, ZOU R L. Design of spatial trajectory crawl training device [J]. Chinese Journal of Rehabilitation Theory and Practice, 2018, 24

- (4): 472-482.
- [20] ZHAO Z, BOUWMANS T, ZHANG X, et al. A fuzzy background modeling approach for motion detection in dynamic backgrounds [J]. Commun Comput Inf Sci, 2012, 346: 177-185.
- [21] 谭冠越, 王越超. 工业机器人时间最优轨迹规划及轨迹控制的理论与实验研究[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(2): 185-192. TAN G Y, WANG Y C. Theoretical and experimental research on time-optimal trajectory planning and control of industrial robots[J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(2): 185-192.

(编辑:谭斯允)