

## 基于全变分模型的CT不完全角度重建算法研究进展

齐泽瑶,王远军

上海理工大学医疗器械与食品学院, 上海 200093

**【摘要】**在计算机断层扫描成像领域,不完全角度重建算法可以在不完备的投影数据中重建出质量较好的图像,而其中比较突出的一类算法是基于全变分模型的重建算法。研究者们在此模型的基础上提出了许多相关的算法,重建出了质量更好的图像。本文首先简要介绍了全变分模型重建算法,然后在模型改进和求解算法两个方面对此模型的重建算法进行研究。在模型改进方面主要介绍了根据全变分模型的局限性以及图像的内涵信息引入相关的先验(方向信息、非局部信息、高阶梯度信息等)来改善图像的重建性能。在求解算法方面主要介绍了经典的梯度下降算法以及基于稀疏优化理论的交替方向最小化算法。最后分析总结了目前存在的问题以及提出模型改进和求解算法两方面相结合依旧是未来发展的趋势。

**【关键词】**计算机断层扫描;不完全角度重建;全变分;综述

**【中图分类号】**R318;TP391

**【文献标志码】**A

**【文章编号】**1005-202X(2019)02-0180-05

## Research progress on limited-angle CT reconstruction algorithm based on total variation model

QI Zeyao, WANG Yuanjun

School of Medical Instrument and Food Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China

**Abstract:** Using limited-angle CT reconstruction algorithm can reconstruct a CT image of good quality from limited projection data, and the most prominent algorithms among them are based on total variation (TV) model. So far, many related algorithms based on TV model have been proposed to reconstruct images of better quality. Herein the reconstruction algorithms based on TV model are briefly introduced and then studied in two aspects, namely model improvement and solution algorithm. In terms of model improvement, we mainly introduce the methods about how to improve the reconstruction performance of images by introducing relevant prior information (direction information, non-local information, high-order gradient information, etc.) based on the limitations of the TV model and the connotation information of the image. In terms of solution algorithm, we mainly introduce classical gradient descent algorithms and the alternating direction minimization algorithm based on sparse optimization theory. Finally, the existing problems are analyzed and summarized. In conclusion, the combination of model improvement and solution algorithm is still the trend of future development of TV-based limited-angle CT reconstruction algorithm.

**Keywords:** computed tomography; limited-angle CT reconstruction; total variation; review

### 前言

计算机断层成像(Computed Tomography, CT)是通过投影数据进行图像重建获取物体内部信息的一种透视成像技术,被广泛应用于医学诊断、无损检测。在医学成像领域,CT技术协助医生对疾病进行

预防和诊断,做出巨大的贡献,但在进行投影采样时,病人会受到辐射,当辐射剂量超过一定程度后会影响人体的生理机能,增加患者的致癌机率,对于儿童患者的影响更为严重<sup>[1-2]</sup>。因此,在保持图像质量的同时降低辐射剂量是人们关注的热点问题,也是CT研究中亟待解决的难点问题。而不完全角度重建问题的研究就是解决这一问题的一种有效方法,很多从事CT图像重建算法研究的团队将研究方向聚焦到不完全角度重建算法的研究上<sup>[3]</sup>。

不完全角度重建主要有稀疏角度和有限角度这两种重建方式。传统的解析算法和迭代算法对其重建时,会出现不同程度的伪影和失真,往往不能满足临床图像质量的要求<sup>[4]</sup>。而压缩感知(Compressed

**【收稿日期】**2018-08-03

**【基金项目】**国家自然科学基金(61201067);上海市自然科学基金(18ZR1426900)

**【作者简介】**齐泽瑶,硕士,研究方向:CT图像重建算法研究,E-mail: 871166527@qq.com

**【通信作者】**王远军,博士,副教授,研究方向:生物医学工程、医学图像处理,E-mail: yjwang@usst.edu.cn

Sensing, CS)理论的发展为不完全角度重建提供了新思路,CS的主要思想与不完全角度重建的思想非常相似,都是在欠采样的投影数据中恢复完整的信号。其中,以全变分作为CS稀疏变换的重建算法取得了很好的重建效果<sup>[5]</sup>。2006年,Sidky等<sup>[6]</sup>将全变分模型应用到图像重建领域,提出TVM-POCS(Total Variation Minimization-Projection onto Convex Sets)算法,并表明这个算法可以在不完全角度投影数据中对CT图像进行重建,开启了重建算法领域的新局面。

尽管全变分模型在重建高质量CT图像方面取得了巨大成功,但在图像平滑区域易产生块伪影并使图像边缘模糊<sup>[7]</sup>。为克服这些问题,国内外CT领域学者以全变分模型为基础,提出了许多重建算法。为了促进不完全角度CT图像重建算法的性能,通常从改进重建模型和模型求解的方法方面进行研究<sup>[8]</sup>,通过提高图像稀疏表达能力、丰富图像先验信息、引入权重对图像的边缘和非边缘部分进行不同程度的平滑处理,提高算法精度。传统的基于全变分模型的重建算法采用梯度下降算法进行求解,虽然能重建出精度较高的图像,但是耗时太长,在收敛速度和求解效率上还有很大的提升空间,通过改进下降步长、加入松弛因子以及改变求解的方式可加速收敛,目前采用比较多的求解方式是用交替方向最小化方法进行求解。此外,近几年的重建算法主要是在优化重建模型的基础上采用合理的稀疏求解方式进行求解,在短时间内获得高质量的重建图像,这是目前CT图像重建算法特别是不完全角度重建算法的一个研究热点。

总之,随着国内外对全变分重建算法愈加重视,基于全变分模型的重建算法还将会不断创新和发展。为了方便研究者对此算法的现状做一个较全面的了解,本文对现有典型的全变分重建算法及发展前景进行了综述。

## 1 基于全变分模型的重建算法

CT系统的成像过程可以用数学公式表示为:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_J)^T$  为待重建图像向量;  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_J)^T$  为投影向量; 系统矩阵  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  把图像  $\mathbf{f}$  和投影  $\mathbf{p}$  关联起来,  $a_{ij}$  为投影向量扫描时第  $i$  条射线穿过第  $j$  个像素的长度,  $j \in J$  表示图像像素集合  $J$  中第  $j$  个像素,  $i \in I$  表示投影数据集合  $I$  中第  $i$  条射线。CT图像重建的问题可以表达为根据系统

矩阵  $\mathbf{A}$  和投影向量  $\mathbf{p}$  来检索未知图像  $\mathbf{f}$ 。

当投影数据不完备时,式(1)就变成了一个欠定问题,存在无穷多的解。在使用传统的重建算法,如代数重建技术(Algebraic Reconstruction Technique, ART)、联合代数重建技术(Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique, SART)等进行求解时无法获得精确的解,需要添加约束条件或者正则化项以得到待重建图像:

$$\min \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + J(\mathbf{f}) \quad (2)$$

其中,  $\|\cdot\|_2$  表示图像向量的L2范数;  $\mu$  是正则化参数。在式(2)中,第一项为数据保真项,用来保证重建图像  $\mathbf{f}$  和投影数据  $\mathbf{p}$  的一致性;第二项是正则化项,用来约束图像,一般常用图像的稀疏性作为先验来约束式(1)中重建模型的解。

对于医学图像来说,大部分图像是非稀疏的,但是经过一个合适的变换域进行稀疏变换后可以表示为稀疏。在大多数医学图像中,一般强度变化发生在图像的边界处,因此可以使用图像的梯度作为稀疏变换。在离散图像中,梯度定义为:

$$\nabla f = \sqrt{(f_{s,t} - f_{s-1,t})^2 + (f_{s,t} - f_{s,t-1})^2} \quad (3)$$

其中,  $f_{s,t}$  表示图像在  $(s,t)$  处的像素值,  $s$  和  $t$  分别表示横向和纵向坐标。在迭代重建算法中为了更好地发挥稀疏理论的优势,通常把图像梯度的L1范数最小化作为目标函数,图像梯度的L1范数也称为图像的全变分,定义为:

$$\|\mathbf{f}\|_{\text{TV}} = \sum_{s,t} \sqrt{(f_{s,t} - f_{s-1,t})^2 + (f_{s,t} - f_{s,t-1})^2} \quad (4)$$

将图像的全变分作为正则项,则基于全变分模型的图像重建问题变为:

$$\min \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_{\text{TV}} \quad (5)$$

## 2 全变分模型重建算法综述

### 2.1 基于重建模型的改进算法

基于CS理论的全变分模型重建算法主要研究重建模型和求解方法两方面。基于重建模型的改进算法主要对重建算法中的全变分项进行改进,通过融入先验信息来保持图像的边缘信息和细节信息、改变全变分的阶数消除“阶梯效应”以及其他改进模型提高图像重建的性能,因此建立精准度更高的重建模型是研究的重点。

**2.1.1 引入方向信息的全变分重建模型** 基于全变分模型的重建算法可以从不完全角度的投影数据中重建出高质量图像而不引入显著的伪影。但在不完全

角度重建中,数据一致性的强度有时是有角度变化的,而传统的全变分最小化过程是各向同性的,缺乏方向性信息,这可能妨碍了模糊边缘处的检测和在非模糊方向可能削弱边缘保持的能力。为了克服这种情况,把方向信息作为额外的先验引入传统的全变分中,通过给不同的方向分配不同的权重,利用各向异性属性,减少全变分项和各向异性数据保真度约束之间的失衡。Jin等<sup>[9]</sup>以常数作为权重值,在细节信息丰富的方向设置大的权值,避免模糊的边缘检测,取得了不错的重建效果,但以常数作为权重值需要多次的调节才能确定最优的权值,不仅耗时而且在迭代过程中权值恒定不变可能对方向信息的选取造成一些影响。随后,一些以方向性信息为先验的自适应的权值被提出并应用到全变分中,在迭代的过程中自适应地选取权值,每迭代一次更新一次权值,在抑制伪影和保护边缘方面相比传统的全变分最小化方法具有更好的性能<sup>[10-14]</sup>,该方法的关键是寻求各个方向的权重平衡。

**2.1.2 引入非局部信息的全变分重建模型** 在不完全角度重建中,由于投影数据的不完备性,图像的细节信息会丢失,而引入一些先验信息可以改善重建图像的质量。近年来,在全变分模型中引入非局部信息,在重建领域显示出了良好的细节保持性能。全变分模型仅仅利用了图像局部连续性的稀疏信息,这种方法在某些细节丰富或分段多项式的情况下可能会受到限制,但在正则项中引入结构相似性的非局部梯度信息,利用更全局的信息可以重建出质量更好的图像<sup>[15-16]</sup>。然而非局部梯度是基于参考图像中像素的相似性权重进行统计计算的,在进行统计计算时可能引入一些错误信息,导致重建图像不精确。因此,在进行计算相似性权重时,避免错误信息的引入是关键<sup>[17]</sup>。

**2.1.3 基于混合阶全变分重建模型** 近年来,随着稀疏理论的发展,提出了许多基于全变分模型的重建算法,并取得了非常好的重建效果。然而由于全变分正则化的“分段常数”效应,这些方法的重建结果易出现阶梯效应(图像上光滑区域出现虚假边缘),尽管很多方法被提出,试图解决这一现象,但结果还是会产生一些伪影,这是因为并非所有的梯度图像都满足稀疏性条件。最近基于全变分的混合阶模型被提出用来解决这一问题,取得了不错的效果。把全变分正则项从分段常数扩展到了分段多项式,从而更好地保持图像分段连续的细节信息,其中最具有代表性的是广义全变分(Total Generalized Variation, TGV)重建模型:

$$\min \frac{\mu}{2} \|Af - p\|_2^2 + \text{TGV}_\alpha^k(f) \quad (6)$$

其中,  $\text{TGV}_\alpha^k(f) = \alpha_0 \|\nabla f - \omega\| + \alpha_1 \|\varepsilon(\omega)\|$ ,  $\nabla$  表示梯度算子,  $\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2}(\nabla \omega + \nabla \omega^T)$  记为对称导数,  $\omega$  是与  $\nabla f$  相关的一个松弛变量。

此类重建算法针对全变分重建模型获得的图像易出现阶梯效应和对于宽度较小的边缘易平滑而导致边缘模糊现象进行研究。不仅考虑一阶差分算子而且应用了高阶差分算子,利用分段多项式函数保持重建图像锐利边缘和细节,同时有效地克服阶梯效应<sup>[5,7,18-19]</sup>。但混合阶模型中各阶差分算子的权重以及参数的设置等还需进一步研究。另外,在TGV的基础上引入更加丰富的先验信息也是今后的研究方向和重点。

**2.1.4 其他基于全变分模型的重建算法** 在全变分正则项中引入方向性信息、非局部信息等先验信息提高了图像稀疏表达能力,可以重建出很好的图像。图像中不仅仅只有这两种先验信息,还有许多待开发的先验信息。Chen等<sup>[20]</sup>在重建过程中不仅应用了水平和垂直方向的梯度信息,还引入了对角方向的梯度信息,改善了重建的结果图像;Deng等<sup>[21]</sup>采用完整投影数据获得相关先验图像,利用重建图像与重建图像和先验图像差之间的不同权重来建立模型,充分利用先验图像丰富的信息重建出高质量的图像;Chen等<sup>[22]</sup>联合全变分和Mumford-Shah分割的MSTV模型重建图像,具有良好的边缘保护和抗噪能力;Zheng等<sup>[23]</sup>增加整个模型的约束,联合曲波模型和全变分模型改善了对于具有纹理或复杂形状的图像可能会产生伪影并导致细节的丢失的现象等。

在重建的过程中,引入的先验信息越丰富,图像重建模型越精确,所以引入更加丰富的先验信息作为约束是CT图像重建算法研究的重点。但这类算法很难把各方面的先验信息都引入到全变分中,引入过多的先验信息会使算法复杂,求解难度大、耗时长。因此,引入先验信息时要综合考虑重建算法的性能。

## 2.2 重建模型的求解方法

传统的全变分模型重建算法利用梯度下降算法进行求解,虽然能重建出精度较高的图像,但是在收敛速度和求解效率上还有很大的提升空间。许多研究者在如何提高重建算法的性能和收敛效率上进行研究,提出了许多求解算法,其中比较热门的是梯度下降算法和基于稀疏优化的交替方向最小化算法。

**2.2.1 梯度下降算法** 梯度下降算法是以负梯度方向作为下降方向的极小化算法。其迭代公式为:



$$f^{k+1} = f^k - \alpha \frac{\partial \text{TV}(f^k)}{\partial f^k} \quad (7)$$

其中,  $\alpha$  是梯度下降的步长;  $\frac{\partial \text{TV}(f^k)}{\partial f^k}$  为下降的方向。用梯度下降算法进行求解的过程是先对式(5)中的模型用传统的迭代算法(ART、SART等)对图像进行更新,然后用梯度下降算法调整全变分,使得重建图像的全变分最小。在梯度下降算法中,步长是一个很重要的参数,如果步长太大,收敛的速度变快但重建的图像会出现过于平滑的现象,如步长太小,收敛的速度变慢但重建图像的伪影可能不能有效地去除。因此,选择一个合适的步长很重要。一些研究者对梯度下降算法的步长和下降方向进行改进,应用到重建算法的求解,提高了重建算法的效率<sup>[24-27]</sup>。

**2.2.2 交替方向最小化算法** 基于稀疏优化的交替方向最小化算法是在式(5)中的模型中引入与  $Df$  相关的松弛变量  $\omega$ , 并应用增广拉格朗日方法把基于全变分模型重建算法的目标函数进行近似等价转换为:

$$L_A = \sum_i \left( \|\omega_i\| - v_i^T (D_i f - \omega_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i f - \omega_i\|_2^2 \right) - \lambda^T (Af - p) + \frac{\mu}{2} \|Af - p\|_2^2 \quad (8)$$

使用交替方向法求解  $L_A$ , 将式(8)中的等式转为  $\omega$  子问题和  $f$  子问题来求解:

$\omega$  子问题:

$$\min \sum_i \left( \|\omega_i\| - v_i^T (D_i f - \omega_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i f - \omega_i\|_2^2 \right) \quad (9)$$

$f$  子问题:

$$\min \sum_i \left( -v_i^T (D_i f - \omega_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i f - \omega_i\|_2^2 \right) - \lambda^T (Af - p) + \frac{\mu}{2} \|Af - p\|_2^2 \quad (10)$$

$\omega$  子问题可以利用 shrinkage 算子实现快速求解,在求出  $\omega$  子问题的基础上,采用最速下降算法、伪逆等方法求解  $f$  子问题,更新算子。依次迭代求解两个子问题,直到达到迭代的停止标准。基于稀疏优化算法提出的重建算法与其他算法不同,不需要用经典重建算法对图像进行更新,而是直接对全变分进行最小化,大大提高了算法的收敛性能。目前提出的许多重建算法都是在求解此算法的基础上进行求解运算的,此求解算法在CT不完全角度重建领域很受欢迎<sup>[7, 18, 23, 28-30]</sup>。

另外还存在一些其他求解算法,如 Chambolle-Pock 框架下的一阶原始对偶方法<sup>[31]</sup>、NESTA 方法<sup>[32]</sup>、联合 FISTA 及 SB 框架的 FRESH 方法<sup>[33]</sup>等,这些求解算法提高了重建算法的性能和收敛效率。

### 3 总结与展望

在CT图像不完全角度重建领域中,基于CS理论的全变分模型重建算法已经受到广泛关注。本文通过对国内外有关不完全角度重建算法的调研,对现有的基于全变分模型重建算法做了一个比较全面的综述,对其基本的重建模型以及其改进的模型做了系统的简介,本文将基于全变分模型的重建算法研究总结为两类:重建模型的改进(主要着重于正则化的改进)和模型求解方法的优化。经过众多的研究不难看出,基于CS理论的全变分模型重建算法比较适用于不完全角度投影数据重建,而且优化算法的最新研究成果也有效改善了重建性能和收敛速度。

基于梯度图像的先验信息对于医学图像的稀疏性表达并不完美,无法挖掘出图像更深层次先验信息问题造成的阶梯效应和边缘模糊现象。许多算法在原算法的基础上引入更加丰富的先验信息,改变全变分的阶数以及增加合理的约束来适应各种各样的环境以解决这种情况,并取得了很好的成效。不容置疑,寻求高精度的重建模型是目前CT不完全角度重建领域的一个重要研究方向,但引入过多的先验信息、增加过多的约束条件提高重建模型的精度时,也会使模型结构复杂化、参数多且难以达到平衡,求解较为困难。虽然基于稀疏的求解算法不断提出,用来加快算法的收敛性,但在实际应用中,重建过程所消耗的时间依然远远没有达到人们所期望的界限。在不完全角度重建领域,在寻求高精度重建模型的同时,最大限度减少模型复杂度,同时结合合适的优化算法进行求解依然是全变分模型重建算法未来发展的趋势。

### 【参考文献】

- [1] FRUSH D P, DONNELLY L F, ROSEN N S. Computed tomography and radiation risks: what pediatric health care providers should know [J]. Pediatrics, 2003, 112(4): 951-957.
- [2] 沈晓波, 聂生东. 低剂量CT技术发展及其临床应用[J]. 中国医学物理学杂志, 2016, 33(3): 238-242.
- [3] SHEN X B, NIE S D. Development and clinical application of low dose computed tomography technology [J]. Chinese Journal of Medical Physics, 2016, 33(3): 238-242.
- [4] 王林元, 刘宏奎, 李磊, 等. 基于稀疏优化的计算机断层成像图像不完全角度重建综述[J]. 物理学报, 2014, 63(20): 15-24.
- [5] WANG L Y, LIU H K, LI L, et al. Review of sparse optimization-based computed tomography image reconstruction from few-view projections [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(20): 15-24.
- [6] 闫焱, 李磊. CT图像重建算法[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [7] YAN B, LI L. CT image reconstruction algorithm [M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [8] DEBATIN M, HESSER J. Accurate low-dose iterative CT

- reconstruction from few projections by generalized anisotropic total variation minimization for industrial CT [J]. J Xray Sci Technol, 2015, 23(6): 701-726.
- [6] SIDKY E Y, KAO C M, PAN X C. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT[J]. J Xray Sci Technol, 2006, 14(2): 119-139.
- [7] ZHANG H, WANG L, YAN B, et al. Constrained total generalized p-variation minimization for few-view X-ray computed tomography image reconstruction[J]. PLoS One, 2016, 11(2): e0149899.
- [8] 陈建林. 基于广义TV正则化的锥束CT迭代重建研究[D]. 郑州: 中国人民解放军信息工程大学, 2015.
- CHEN J L. Research on the iterative reconstruction based on total generalized variation for cone beam CT[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2015.
- [9] JIN X, LI L, CHEN Z, et al. Anisotropic total variation for limited-angle CT reconstruction[C]. IEEE 2010: Nuclear Science Symposium & Medical Imaging Conference. Piscataway, 2010: 2232-2238.
- [10] LIU Y, MA J, FAN Y, et al. Adaptive-weighted total variation minimization for sparse data toward low-dose x-ray computed tomography image reconstruction[J]. Phys Med Biol, 2012, 57(23): 7923-7956.
- [11] CHEN Z, JIN X, LI L, et al. A limited-angle CT reconstruction method based on anisotropic TV minimization[J]. Phys Med Biol, 2013, 58(7): 2119-2141.
- [12] LI H, CHEN X, WANG Y, et al. Sparse CT reconstruction based on multi-direction anisotropic total variation (MDATV)[J]. Biomed Eng Online, 2014, 13(1): 92.
- [13] HUANG Y, TAUBMANN O, HUANG X, et al. A new weighted anisotropic total variation algorithm for limited angle tomography[C]. ISBI, International Symposium on Biomedical Imaging. Prague: IEEE, 2016: 585-588.
- [14] WANG T, NAKAMOTO K, ZHANG H Y, et al. Reweighted anisotropic total variation minimization for limited-angle CT reconstruction[J]. IEEE Trans Nucl Sci, 2017, 64(10): 2742-2760.
- [15] ZHANG Y, ZHANG W, ZHOU J. Accurate sparse-projection image reconstruction via nonlocal TV regularization[J]. Scientific World J, 2014(22): 458496.
- [16] KIM H, CHEN J, WANG A, et al. Non-local total-variation (NLTV) minimization combined with reweighted L1-norm for compressed sensing CT reconstruction[J]. Phys Med Biol, 2016, 61(18): 6878-6891.
- [17] ZHANG H M, WANG L Y, LI L, et al. Optimization-based image reconstruction in x-ray computed tomography by sparsity exploitation of local continuity and nonlocal spatial self-similarity[J]. Chinese Phys B, 2016, 25(7): 557-565.
- [18] ZHANG H M, XI X Q, YAN B, et al. X-ray CT image reconstruction from few-views via total generalized p-variation minimization[C]// 2015 37th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2015: 5618-5621.
- [19] NIU S, HUANG J, BIAN Z, et al. Iterative reconstruction for sparse-view x-ray CT using alpha-divergence constrained total generalized variation minimization[J]. J Xray Sci Technol, 2017, 25: 673-688.
- [20] CHEN M Y, REN Y, FENG P, et al. Computed tomography image reconstruction from few-views data by multi-directional total variation [J]. J Med Imag Health Inform, 2015, 5(2): 309-316.
- [21] DENG L, FENG P, CHEN M, et al. An improved total variation minimization method using prior images and split-Bregman method in CT reconstruction[J]. Biomed Res Int, 2016(2): 3094698.
- [22] CHEN B, BIAN Z, ZHOU X, et al. A new Mumford-Shah total variation minimization based model for sparse-view x-ray computed tomography image reconstruction[J]. Neurocomputing, 2018, 285: 74-81.
- [23] ZHENG Z, CAI A, LI L, et al. Sparse-view image reconstruction via total absolute curvature combining total variation for X-ray computed tomography[J]. J Xray Sci Technol, 2017, 25(6): 959-980.
- [24] YANG X, HOFMANN R, DAPP R, et al. TV-based conjugate gradient method and discrete L-curve for few-view CT reconstruction of X-ray *in vivo* data[J]. Opt Express, 2015, 23(5): 5368-5387.
- [25] ZIBETTI M V, LIN C, HERMAN G T. Total variation superiorized conjugate gradient method for image reconstruction[J]. Inverse Probl, 2018, 34(3): 034001.
- [26] HUMPHRIES T, WINN J, FARIDANI A. Superiorized algorithm for reconstruction of CT images from sparse-view and limited-angle polyeenergetic data[J]. Phys Med Biol, 2017, 62(16): 6762-6783.
- [27] 彭彬彬, 随力, 黄思佳. 低剂量CT的加权总变差重建算法[J]. 中国医学物理学杂志, 2016, 33(1): 24-29.
- PENG B B, SUI L, HUANG S J. Weighted total variation reconstruction algorithm for low dose CT[J]. Chinese Journal of Medical Physics, 2016, 33(1): 24-29.
- [28] CAI A, WANG L, LI L, et al. Optimization-based image reconstruction in computed tomography by alternating direction method with ordered subsets[J]. J Xray Sci Technol, 2017, 25(3): 429-464.
- [29] LU W, LI L, CAI A, et al. A weighted difference of L1 and L2 on the gradient minimization based on alternating direction method for circular computed tomography[J]. J Xray Sci Technol, 2017, 25(5): 813-829.
- [30] WANG L Y, CAI A L, LIU H K, et al. Column distribution reconstruction algorithm via the alternating direction method[J]. Optik (Stuttg), 2015, 126(9/10): 1006-1011.
- [31] LIU L, HAN Y, JIN M. Fast alternating projection methods for constrained tomographic reconstruction[J]. PLoS One, 2017, 12(3): e0172938.
- [32] HE Z, QIAO Q, LI J, et al. A fast method based on NESTA to accurately reconstruct CT image from highly undersampled projection measurements[J]. J Xray Sci Technol, 2016, 24(6): 865-874.
- [33] CHANG M, LI L, CHEN Z, et al. A few-view reweighted sparsity hunting (FRESH) method for CT image reconstruction[J]. J Xray Sci Technol, 2013, 21(2): 161-176.

(编辑:谭斯允)