

血液流动状态下锥形血管的弹性变形分析

岳树坤¹, 刘忠良², 刘振泽¹, 白云龙³

1. 吉林大学通信工程学院, 吉林 长春 130022; 2. 吉林大学第二医院, 吉林 长春 130041; 3. 长春工业大学电气与电子工程学院, 吉林 长春 130000

【摘要】考虑动脉锥形血管为弹性血管,应用流固耦合方法研究锥形血管在人体血液脉动流动状态下变形问题。在运用血液流动连续性方程、血液运动方程、血管壁运动方程和给定的血压波形函数的基础上,根据流固边界耦合条件建立血管壁变形与应力的关系,揭示血管相应参数变化对血管弹性变形的影响:(1)当血管弹性模量增大到一定程度时,血管壁弹性变形将会很小,失去弹性,导致动脉硬化的发生;(2)当血管壁的厚度增大时,血管壁变形与应力就会增大,如果此时血管某处变薄,则会导致血管破裂;(3)当血压越高时,血管壁变形与应力越大,血压增大到一定程度,会导致脑出血等疾病;(4)当血管半径越大时,血管壁变形与应力会变大,且变化幅度很大。反之,血管壁变形与应力会变小,但变化幅度不明显。通过分析锥形血管弹性变形,为医学工作者研究动脉硬化和脑出血等疾病发病机理提供理论参考。

【关键词】血液;锥形血管;流固耦合;弹性变形;应力

【中图分类号】R322.12

【文献标志码】A

【文章编号】1005-202X(2017)04-0410-06

Elastic deformation analysis of conical blood vessel in the blood flow state

YUE Shukun¹, LIU Zhongliang², LIU Zhenze¹, BAI Yunlong³

1. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China; 2. Second Hospital of Jilin University, Changchun 130041, China; 3. School of Electrical and Electronic Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130000, China

Abstract: Considering the conical artery as elastic blood vessel, the deformation of conical blood vessels when the human blood was in pulsation flow state is studied by using fluid-structure interaction method. Based on the blood flow continuity equation, blood motion equation, vascular wall motion equation, and given blood pressure waveform function, the relationship between the deformation and stress of vascular wall is established according to the condition of fluid-structure interaction. The effects of the parameters of blood vessels on the elastic deformation of blood vessels are revealed. When the elastic modulus increases to a certain degree, the elastic deformation of the vascular wall will be very small, losing elasticity and leading to atherosclerosis. With the increasing thickness of the vascular wall, the deformation and stress of the vascular wall will increase, and the rupture of the vessel will happen at somewhere that the vessel is thinned. The higher blood pressure is, the more significant the vessel wall deformation and stress become. When the blood pressure increases to a certain extent, cerebral hemorrhage disease will happen. When the radius of the vessel is larger, the deformation and stress of the vessel wall will become more significant, with obvious amplitude of variation. On the contrary, the deformation and stress of the vessel wall will be smaller, but the amplitude is not obvious. The analysis of elastic deformation of conical vessel provides a theoretical reference for the medical researchers in the study of the pathogenesis of atherosclerosis and cerebral hemorrhage disease.

Keywords: blood; conical vessel; fluid-structure interaction; elastic deformation; stress

前言

【收稿日期】2016-11-30

【基金项目】吉林省卫生计生适宜技术推广项目(2016s035)

【作者简介】岳树坤,男,硕士研究生,研究方向:血管三维建模与血液流体力学,E-mail:726578403@qq.com

【通信作者】刘忠良,男,教授,主要从事临床医学、血液流体力学等方面研究

血液动力学研究开拓了对心血管系统中生理和病理现象的新认识,虽然动脉疾病发病机理很复杂,但是通过临床医学观察可以确定其病理现象与血液动力学特性密不可分^[1]。在生物工程力学领域中,血液动力学问题是心血管系统中重要的研究课题,流动的血液与具有弹性的血管壁存在着流固耦合效应(血液在血管中流动时,管壁会受到流动血液的压力

而变形,然而变形后的管壁会产生固有的弹性力作用于血液,从而产生耦合效应),动脉中血液的周期性脉动使弹性动脉管壁产生径向变形和环向应力,成为研究的热点^[2]。众所周知,动脉大血管都是存在锥度角的,且锥度角对大动脉血管中血液流动的机理是有影响的,通过锥形血管几何模型、血液运动理论模型以及人体生理脉动条件来分析锥形动脉血管内血液流动特点是非常有意义的^[3-5]。本研究在动脉血管存在小锥度角的情况下,根据流固耦合方法,运用流体力学理论^[6-8]与弹性力学理论^[3,9]对弹性血管建立血管壁与流动血液相互耦合的数学模型,从而推导出血管壁径向变形与环向应力,通过分析血管各参数变化对血管壁径向变形与环向应力的影响,对揭示心脑血管疾病与血液动力学因素的关系提供基础条件和研究方法。

1 基本理论方程

1.1 血液流动方程

血管模型如图1所示。

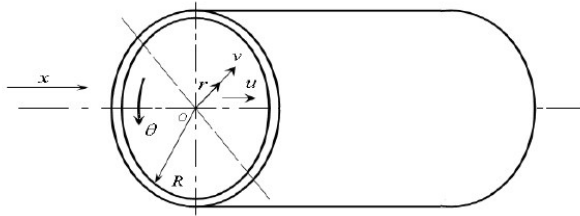


图1 血管模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of vascular model

假设流动的血液为不可压缩牛顿流体,则血流流动连续性方程^[10-13]为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

血液运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} \right) \end{cases} \quad (2)$$

其中, u 是 x 轴上血液的速度, v 是 r 轴方向上的血液速度, p 是血压, $\nu = \eta/\rho$ 为血液运动粘度, η 为血液运动粘度。

考虑到血液径向流动速度远小于轴向流动速度时,运动方程中惯性项与粘性项之比为小量,对上述运动方程与连续方程各项进行量级估计,忽略高阶小量^[2,10-11],则方程可为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

1.2 血管壁弹性力学方程

血管壁所受到的径向作用力以及轴向作用力是由血液流动作用产生的,此时血管壁的径向作用力以及轴向作用力^[3,10,14]为:

$$\rho_{\omega} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \omega_0 \xi \right) = \frac{h}{H} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R(x)} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{\eta}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{r=R} \quad (4)$$

$$\rho_{\omega} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{p-p_e}{H} - \frac{h}{H} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\mu}{R(x)} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\xi}{R^2(x)} \right) - \frac{2\eta}{H} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (5)$$

如果考虑 $H=h$,此时血管壁不受周围组织的弹性约束,简化方程可得:

$$\rho_{\omega} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R(x)} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{\eta}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (6)$$

$$\rho_{\omega} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{p-p_e}{H} - \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\mu}{R(x)} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\xi}{R^2(x)} \right) \quad (7)$$

其中, H 为实际的血管壁厚度, ξ 为血管壁 r 轴方向位移, ξ 为血管壁 x 轴方向位移, ρ_{ω} 、 h 、 R 、 E 、 μ 分别为血管壁的密度、厚度、半径、弹性模量、泊松比, p 为血管壁受到的内部压力, p_e 为血管壁受到的外部压力。

假设 $h \ll R$,且动脉血管壁是弹性的,血管的 x 轴方向位移可不计,则式(7)可忽视惯性项与粘性项,方程则为:

$$\frac{p-p_e}{h} - \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\xi}{R^2} = 0 \quad (8)$$

1.3 耦合运动方程

在动脉血管壁 $r=R$ 上,血管壁的运动状态与血液的运动状态是耦合的,其耦合条件^[11-12,15]为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = u \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = v \end{cases} \quad (9)$$

2 锥形血管的变形与应力分析

锥形血管模型如图2所示。

血液随着心脏周期性射血而产生周期性脉动流动,且血压也是周期性变化的,根据心脏周期性射

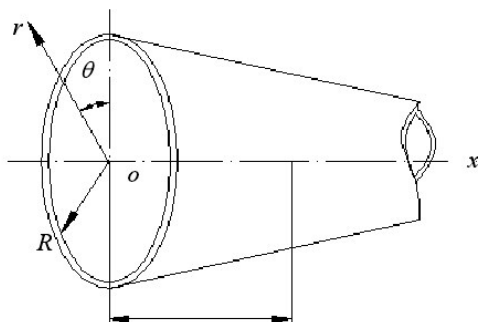


图2 锥形血管模型

Fig.2 Conical vessel model

血,时间段可划分为: $0 \leq t \leq \frac{0.8}{3} \text{ s}$ 、 $0.4 \text{ s} \leq t \leq \frac{2}{3} \text{ s}$ 和 $\frac{0.8}{3} \text{ s} \leq t \leq 0.4 \text{ s}$ 、 $\frac{2}{3} \text{ s} \leq t \leq 0.8 \text{ s}$, 血液压力波形图如图3所示^[10-11,15]:

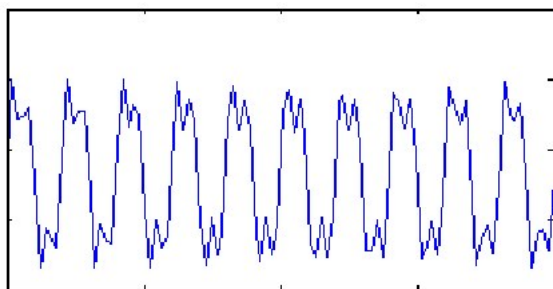


图3 血液压力波形图

Fig.3 Blood pressure waveform

正常人的心率周期 $T=0.8 \text{ s}$, 在动脉中, 一周期内血液压力的分段方程如下:

当 $0 \leq t \leq \frac{0.8}{3} \text{ s}$ 、 $0.4 \text{ s} \leq t \leq \frac{2}{3} \text{ s}$ 时,

$$\begin{cases} p - p_e = p_1(x)(e^{j\omega t} + B_1) + \frac{1}{2}p_2(x)(e^{j3\omega t} + B_1) \\ u = u_1(r, x)(e^{j\omega t} + B_1) + \frac{1}{2}u_2(r, x)(e^{j3\omega t} + B_1) \\ v = v_1(r, x)(e^{j\omega t} + B_1) + \frac{1}{2}v_2(r, x)(e^{j3\omega t} + B_1) \end{cases} \quad (10)$$

当 $\frac{0.8}{3} \text{ s} \leq t \leq 0.4 \text{ s}$ 、 $\frac{2}{3} \text{ s} \leq t \leq 0.8 \text{ s}$ 时,

$$\begin{cases} p - p_e = p_3(x)(e^{j\omega t} + B_1) + \frac{1}{4}p_4(x)(e^{j3\omega t} + B_2) \\ u = u_3(r, x)(e^{j\omega t} + B_2) + \frac{1}{4}u_4(r, x)(e^{j3\omega t} + B_2) \\ v = v_3(r, x)(e^{j\omega t} + B_2) + \frac{1}{4}v_4(r, x)(e^{j3\omega t} + B_2) \end{cases} \quad (11)$$

其中, ω 为波动圆周率, 不同时刻血液压力、 x 轴向流速、 r 轴向流速的幅值分别为 $p_{1-4}(x)$ 、 $u_{1-4}(r, x)$ 、 $v_{1-4}(r, x)$, B_1 、 B_2 为常数。

2.1 血液流动的速度及压力表达式

锥形血管段在血液经过时血管壁半径的表达式

可写成:

$$R(x) = -0.04x + 0.005(m), x \in (0, 0.05 \text{ m}) \quad (12)$$

当 $0 \leq t \leq \frac{0.8}{3} \text{ s}$ 时, 取:

$$\begin{cases} p - p_e = p_1(x)e^{j\omega t} \\ u = u_1(r, x)e^{j\omega t} \\ v = v_1(r, x)e^{j\omega t} \end{cases} \quad (13)$$

式(13)代入血流流动方程得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(r, x)}{\partial x} + \frac{\partial v_1(r, x)}{\partial r} + \frac{v_1(r, x)}{r} &= 0 \\ j\omega u_1(r, x) &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp(x)}{dx} + v \left(\frac{\partial^2 u_1(r, x)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1(r, x)}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

血管壁 $r=0$, u_1 、 v_1 为有限值; 血管壁 $r=R(x)$, $u_1=0$, $v_1=0$, 则有:

$$u_1(r, x) = \frac{j}{\rho\omega} \frac{dp_1(x)}{dx} \left[1 - \frac{J_0\left(\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}r\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}R(x)\right)} \right] \quad (15)$$

$$v_1(r, x) = \frac{j}{\rho\omega} \left[\frac{d^2 p_1(x)}{dx^2} \left(\frac{J_1\left(\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}r\right)}{\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}J_0\left(\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}R(x)\right)} - \frac{r}{2} \right) + \right. \quad (16)$$

$$\left. \frac{dp_1(x)}{dx} \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}r\right)J_1\left(\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}R(x)\right)}{J_0^2\left(\sqrt{\frac{-j\omega}{v}}R(x)\right)} \frac{dr(x)}{dx} \right]$$

其中, J_0 、 J_1 分别为零阶、一阶 Bessel 函数。

对于弹性血管壁, 在 $r=R(x)$ 处有:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (17)$$

由式(8)、式(16)和式(17)推出 $p_1(x)$ 方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_1(x)}{dx^2} + \frac{2}{R(x)} \frac{J_1^2(\lambda)}{J_0(\lambda)J_2(\lambda)} \frac{dR(x)}{dx} \frac{dp_1(x)}{dx} - \\ \frac{2j\omega(1-\mu^2)\omega^2 R(x)}{hE} \frac{J_0(\lambda)}{J_2(\lambda)} p_1(x) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

上式中, $\lambda = \sqrt{\frac{-j\omega}{v}} R(x)$, 则:

$$p_1(x) = A_1 \frac{(1-\mu^2)\omega^2}{hE} \left(\sqrt{\frac{\omega}{v}} R(x) \right)^{1.23} e^{0.1123 \left(\sqrt{\frac{\omega}{v}} R(x) \right)} \quad (19)$$

其中, A_1 为待定常数。

同理, 当 $0 \leq t \leq \frac{0.8}{3} \text{ s}$ 时, 取:

$$\begin{cases} p - p_e = p_2(x)e^{j3\omega t} \\ u = u_2(r, x)e^{j3\omega t} \\ v = v_2(r, x)e^{j3\omega t} \end{cases} \quad (20)$$

由式(8), 弹性血管壁变形表达式可为:

$$\xi = \frac{(1-\mu^2)R^2(x)}{hE}(p-p_e) \quad (21)$$

解得:

$$p_2(x) = A_2 \frac{(1-\mu^2)\omega^2}{hE} \left(\sqrt{\frac{3\omega}{v}} R(x) \right)^{1.23} e^{0.1123 \left(\sqrt{\frac{3\omega}{v}} R(x) \right)} \quad (22)$$

其中, A_2 为待定常数。

实际1周期血液压力波形图如图4所示^[10-11,15]。

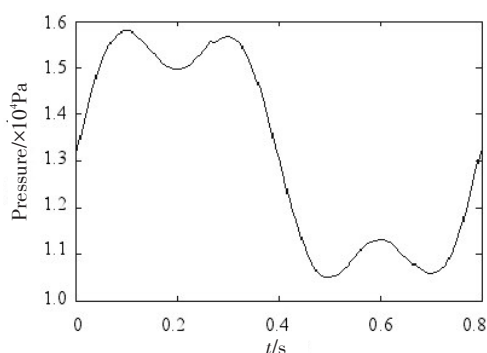


图4 周期血压波形图

Fig.4 Periodic blood pressure waveform

联立 $p_1(x)$ 、 $p_2(x)$ 以及所给血液压力波形图, 可有:

当 $0 \leq t \leq \frac{0.8}{3} \text{ s}$, $0.4 \leq t \leq \frac{2}{3} \text{ s}$ 时,

$$p-p_e = A_1 \frac{(1-\mu^2)\omega^2}{hE} \left(\sqrt{\frac{\omega}{v}} R(x) \right)^{1.23} e^{0.1123 \left(\sqrt{\frac{\omega}{v}} R(x) \right)} \quad (23)$$

$$\left(\sin(\omega t) + B_1 \right) + \frac{1}{2} A_2 \frac{(1-\mu^2)\omega^2}{hE} \left(\sqrt{\frac{3\omega}{v}} R(x) \right)^{1.23} e^{0.1123 \left(\sqrt{\frac{3\omega}{v}} R(x) \right)} \left(\sin(3\omega t) + B_1 \right)$$

当 $\frac{0.8}{3} \leq t \leq 0.4 \text{ s}$, $\frac{2}{3} \leq t \leq 0.8 \text{ s}$ 时,

$$p-p_e = A_3 \frac{(1-\mu^2)\omega^2}{hE} \left(\sqrt{\frac{\omega}{v}} R(x) \right)^{1.23} e^{0.1123 \left(\sqrt{\frac{\omega}{v}} R(x) \right)} \quad (24)$$

$$\left(\sin(\omega t) + B_2 \right) + \frac{1}{4} A_4 \frac{(1-\mu^2)\omega^2}{hE} \left(\sqrt{\frac{3\omega}{v}} R(x) \right)^{1.23} e^{0.1123 \left(\sqrt{\frac{3\omega}{v}} R(x) \right)} \left(\sin(3\omega t) + B_2 \right)$$

根据血液压力周期的实际波形图, 正常血压收缩压以及舒张压分别为 120 mmHg (此时 $t=0.3 \text{ s}$ 、 $p-p_e=1.58 \times 10^4 \text{ Pa}$) 和 80 mmHg (此时 $t=0.7 \text{ s}$ 、 $p-p_e=1.05 \times 10^4 \text{ Pa}$), 可知 $x=0$ 时, $A_1=553.2$ 、 $A_2=162.1$ 、 $B_1=3.5$; $A_3=553.0$ 、 $A_4=162.3$ 、 $B_2=4.2$ 。

2.2 血管壁的变形与应力表达式

血管壁的变形与应力表达式, 如下:

$$\sigma_\theta = E\varepsilon_\theta = E \frac{\xi}{R} = \frac{(1-\mu^2)R(x)}{h}(p-p_e) \quad (25)$$

3 仿真

分析在脉动条件下血管各参数的变化对血管壁变形与应力的影响, 取长度为 0.05 m 的动脉锥形血管, 其半径为: $R(x) = -0.04x + 0.005$, $x \in (0, 0.05)$, 单位为 m。血管各参数^[11-12,16]: 血管壁弹性模量取值范围 E 为 $5 \times 10^5 \sim 7 \times 10^5 \text{ Pa}$, 厚度取值范围 h 为 $5 \times 10^{-4} \sim 7 \times 10^{-4} \text{ m}$, 泊松比 $\mu=0.3$, 圆频率 $\omega=7.85 \text{ rad/s}$, 血液动力粘度 $\eta=4.2 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 血液运动粘度 $\nu=\eta/\rho=4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

4 结果分析与总结

通过仿真结果可以得出动脉锥形血管在血液流动状态下产生的弹性形变与血管的弹性模量、血管壁厚度、血管半径以及血压密不可分。如图5所示, 当血管弹性模量增大时, 血管壁径向变形与环向应力减小, 且当弹性模量增大到一定程度时, 血管壁弹性形变会很小, 进而失去弹性, 导致动脉硬化的发生, 建议明确血管动脉硬化程度和确立血管动脉硬化相应指标时要充分考虑血管弹性模量以及径向变形的大小。

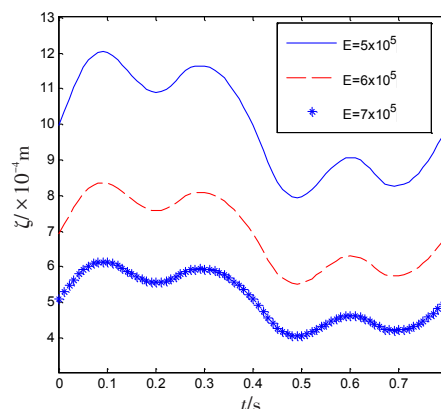


图5 $x=0$ 处血管壁径向变形与弹性模量关系

Fig.5 Relationship between radial deformation and elastic modulus of vascular wall with $x=0$

如图6所示, 当血管壁厚度增大时, 血管壁径向位移和环向应力就会增大, 如果血管壁很薄, 血管壁所受环向应力很大时, 会导致血管破裂。如图7所示, 当血管半径越大时, 血管壁径向变形与环向应力会变大, 且变化幅度很大; 反之, 血管壁径向变形与环向应力会变小, 但变化幅度不明显。如图8所示, 当血压越高时, 血管壁径向变形与环向应力越大, 血压增大到一定程度, 会导致脑出血等疾病, 对于高血压患者要时常注意锻炼来降低血压。当血压越低

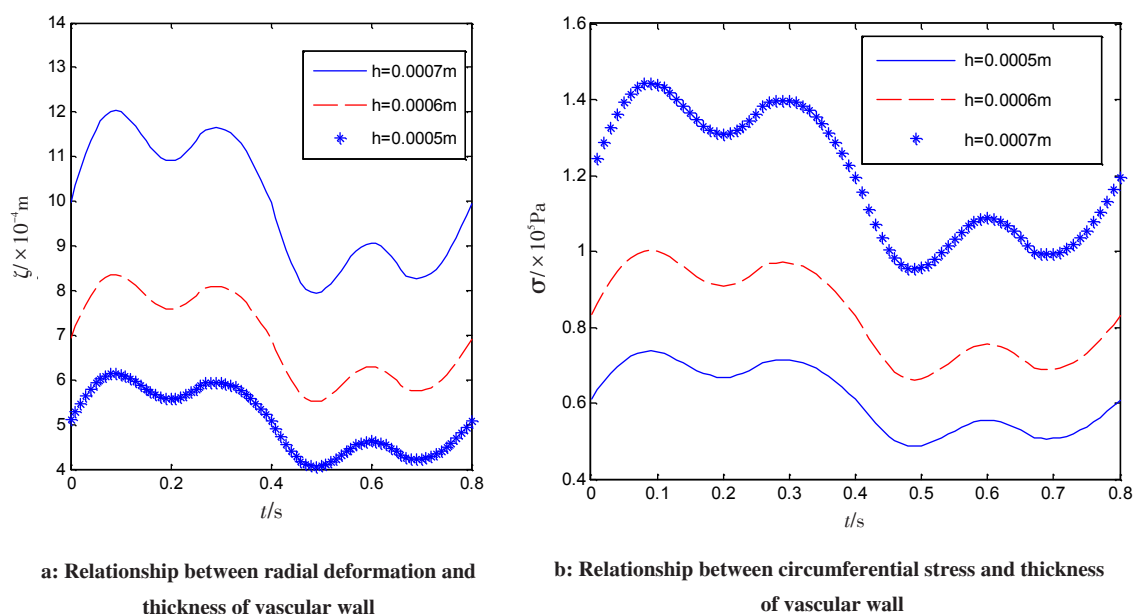
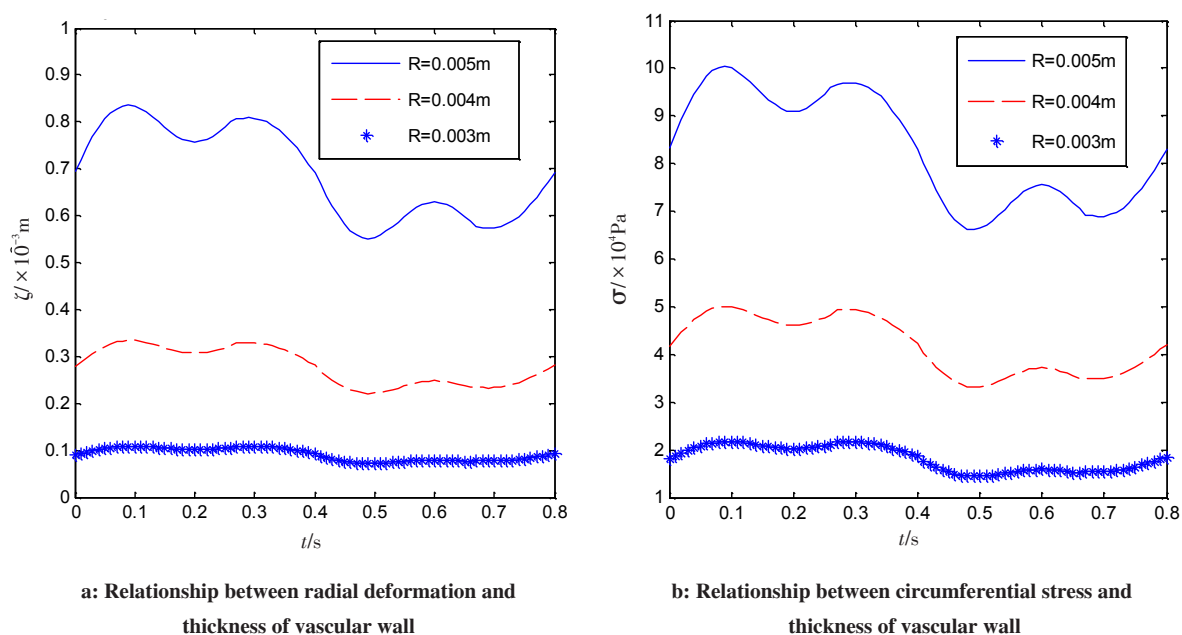
图6 $x=0$ 处血管壁径向变形、环向应力与厚度关系Fig.6 Relationship between radial deformation, circumferential stress, and thickness of vascular wall with $x=0$ 

图7 血管壁径向变形、环向应力与半径关系

Fig.7 Relationship between radial deformation, circumferential stress, and radius of vascular wall

时,血管壁径向变形与环向应力越小,对于低血压可能会造成呼吸困难、昏厥等急性症状,应时刻注意。如图9所示,当血管半径较大时,随着血管半径减小,血管壁径向变形与环向应力减小很快,但当血管半径较小时,血管壁径向变形与环向应力的变化较慢甚至渐进平稳。故大动脉中血管壁径向变形变化幅度明显,而小动脉中血管壁径向变形与环向应力变化相对平稳。本研究给定较为复杂且更贴近血液波

形实际情况的周期波,采用相容拉格朗日-欧拉法,根据血液流体运动方程以及血管壁弹性运动方程,通过求解耦合的边界条件来获得影响心血管病变关键因素的血管壁径向形变与环向应力,为医学工作者研究心血管病变的发病机理提供理论基础和研究方法。本研究还有许多问题需要进一步探索,如考虑血液流动过程中反射系数、血液渗透和滑移等来分析动脉锥形血管壁径向变形与环向应力。

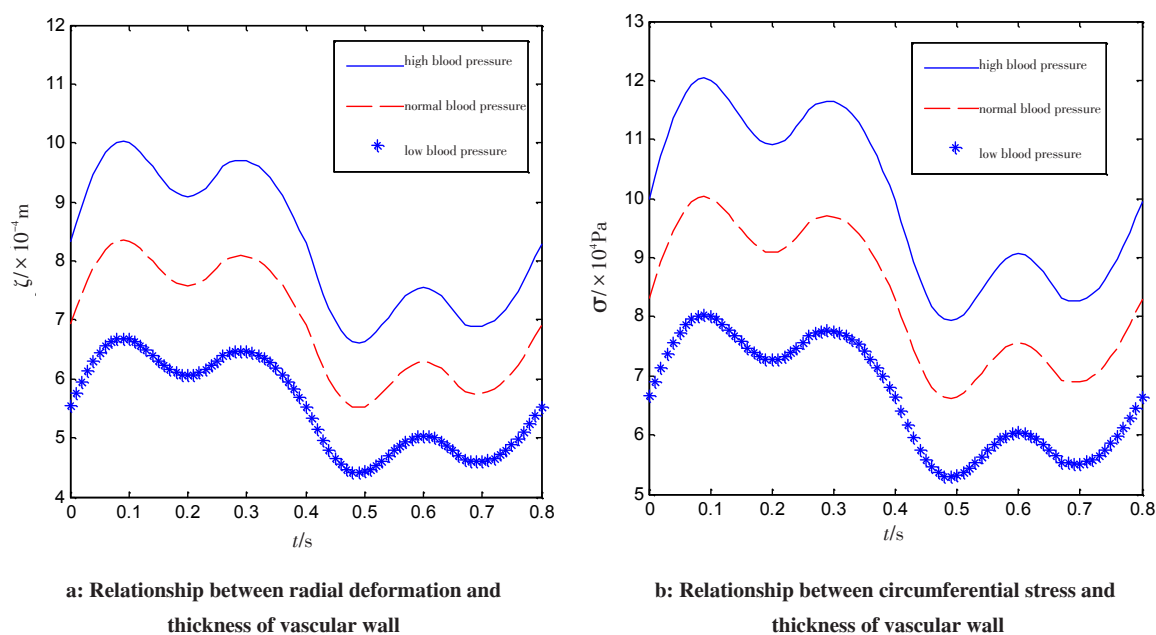


图8 血管壁径向变形、环向应力与血压关系

Fig.8 Relationship between radial deformation, circumferential stress, and blood pressure of vascular wall

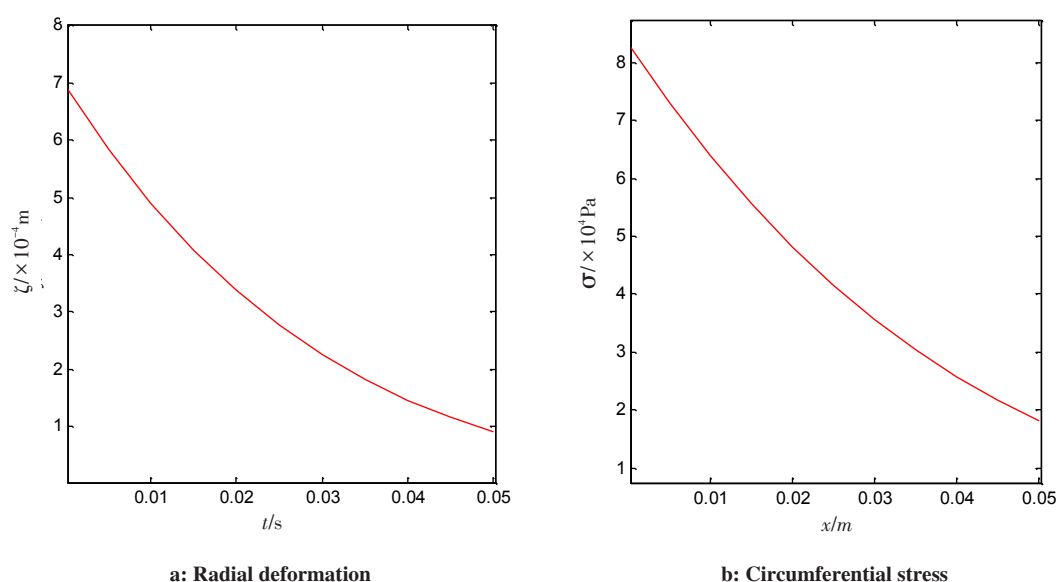


图9 某一时刻血管各点处径向变形与环向应力

Fig.9 Radial deformation and circumferential stress at each points of blood vessel at a certain time

【参考文献】

- [1] 何凡, 李晓阳. 血流与动脉壁的流固耦合研究[J]. 医用生物力学, 2008, 23(5): 405-410.
- HE F, LI X Y. Fluid solid coupling study of blood flow and arterial wall [J]. Medical Biomechanics, 2008, 23(5): 405-410.
- [2] 柳兆荣, 徐刚, 陈泳. 动脉中血液脉动流的一种分析方法[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(2): 205-214.
- LIU Z R, XU G, CHEN Y. An analytical method for pulsatile blood flow in arteries[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(2): 205-214.
- [3] 曹长永. 弹性锥形血管的有限元分析及数值模拟[D]. 衡阳: 南华

大学, 2014.

CAO C Y. Finite element analysis and numerical simulation of elastic tapered blood vessel [D]. Hengyang: University of South China, 2014.

- [4] 邱霖, 范毅方, 董兵超. 锥形血管内血液脉动流的数值模拟[J]. 生物医学工程学杂志, 2004, 21(4): 558-561.

QIU L, FAN Y F, DONG B C. Numerical simulation of pulsatile blood flow in a tapered vessel[J]. Journal of Biomedical Engineering, 2004, 21(4): 558-561.

- [5] HAUSER D L, HO P T. Method of treating occlusion in a blood vessel: US20150157443[P]. 2015.

(下转 432 页)