

微元分析法与奥氏粘度计的测量原理

傅洪波, 魏悦姿, 丁有得, 朱继翔
广州医科大学基础学院生物工程系, 广东 广州 511436

【摘要】从微积分的连续性定义出发,利用相应的等价处理,对医用物理学中微元法处理提出一种新的认识视角,并且应用微元法简洁、系统地推导出奥氏粘度计的测量原理;另外,在该推导过程的物理分析中明确指出,该仪器正是巧妙地利用重力形成静压差,实现泊肃叶公式在垂直管中应用,澄清了相关文献中一些错误判断。

【关键词】微元分析;连续性;奥氏粘度计;微积分;泊肃叶公式;医用物理

【中图分类号】R312

【文献标志码】A

【文章编号】1005-202X(2017)08-0848-02

Infinitesimal method and its application in deriving the measurement principle of Ostwald viscometer

FU Hongbo, WEI Yuezi, DING Youde, ZHU Jixiang

Department of Bioengineering, School of Basic Science, Guangdong Medical University, Guangzhou 511436, China

Abstract: Based on the definition of the continuity of calculus, a new processing perspective to infinitesimal method in the medical physics was put forward with the use of equivalent treatment. A simple and systematic derivation of the measuring principle of Ostwald viscometer was achieved with the infinitesimal method. In addition, the physical analysis in the derivation also declared that the designer of this instrument skillfully used the gravity differential pressure to realize the application of Poiseuille formula in the vertical tube, which clarifies some misjudgements in the relevant literatures.

Keywords: infinitesimal method continuity; Ostwald viscometer; calculus; Poiseuille formula; medical physics

前言

微元分析是整个大学医用物理学处理的核心手段,包括微元的物理分析和数学微元处理。相关文献比较全面报道了该方法的处理思想和处理原则^[1-4],但美中不足之处在于其分析的起点囿于微积分中定积分的类似处理,而我们在教学实践中发现,从函数连续性入手来讨论其处理思想,易理解也更易推广。本文将微元法与“奥氏粘度计测量原理”结合原因在于:首先,奥氏粘度计测量液体粘滞系数是医用物理学的传统实验;其二,其测量原理是微元分析与物理紧密结合典范;其三,该原理推导中关键细节有待进一步澄清与探讨。

1 微元法的基本原理

高等数学中,当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,即:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

等价于:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \quad (2)$$

也即 $f(x) = f(x_0) + \alpha$ (α 为无穷小量),

这样当构成定积分的积分微元时:

$$f(x)dx = (f(x_0) + \alpha)dx = f(x_0)dx + \alpha dx \quad (3)$$

由于 αdx 构成更高阶无穷小量,故舍去,则:

$$f(x)dx \approx f(x_0)dx \quad (4)$$

以上数学的推导揭示出连续函数在局部区域中可以近似当常量(或不变量的)处理,这也就是“化曲为直”,“化变为不变”,“化不均均为均匀处理”多种处理的理论依据。而经典物理中大多数物理变化过程是连续变化的,而连续函数在闭区间上是肯定可积的。简言之,微元分析基础其实是连续性的产物。理解这一点有利于深化其处理的思想,而应用时也就更灵活了。

2 奥氏粘度计的测量原理

在前言中笔者已指出了结合微元法讨论其工作原理的意义。其原理是泊肃叶公式^[5-8]。而该公式的推导就是微元分析的一个典范。

首先,如图1和图2所示,假定内半径为 R ,长为

【收稿日期】2017-04-05

【基金项目】广州市教育局教育科学“十二五”规划课题(B16044033);
广州市教育局“创新强校工程”项目(B17004001)

【作者简介】傅洪波,博士,副教授,研究方向:医学物理和高等数学,
E-mail:305815812@qq.com

【通信作者】丁有得, E-mail:305815812@qq.com

L 的柱型毛细流管内液体是牛顿流体,密度为 ρ ,粘度系数为 η ,球泡中液面高为 h ,毛细管上下两端压强为 p 和 p_B ,假定毛细管内的流体为层流和定常流(速度不随时间改变),以层间(对应半径为 r)微元为研究对象,其所受合外力为零,依托牛顿粘滞力公式,建立定积分微元,可定积分出沿管径的流速 v 的分布: $\rho g L 2\pi r dr = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$,分离变量积分可得:

$$v = f(r) = \frac{\rho g}{4\eta} (R^2 - r^2) \quad (5)$$

其次,由于该速度分布函数 $v = f(r)$ 是 r 的连续函数,因此在沿管径的微元层 dr 内的速度可近似为不变,故可以给出对应横截面积 ds 中的流量微元表达,进一步可积出整个管内的泊肃叶流量(Q 表示流量, g 为重力加速度)公式。简单推导如下:

$$Q = \int_0^R v ds = \int_0^R v \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \rho g L}{8\eta L} = \frac{\pi R^4 \rho g}{8\eta} \quad (6)$$

由此可见,推导中连续应用两次微元法处理,在大学物理公式推导中并不多见,所以可以说微元法处理的典范。

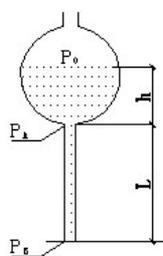


图1 奥氏毛细管粘度计简图

Fig.1 Schematic diagram of Ostwald capillary viscometer

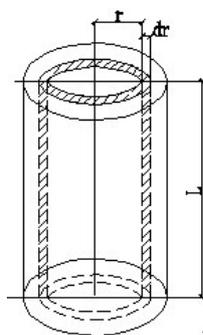


图2 长为 L 的毛细管部分的放大图

Fig.2 Amplification map of a part of capillary with length L

最后指出一点是,由于泊肃叶公式推导时是必须在水平等粗液柱两端加上稳定的压强差来平衡液体粘滞力,为此奥氏粘度计巧妙地利用竖直等粗毛细管(见图1)的重力来产生稳定的压强差,任取毛细管一段为研究对象,可以发现上层液泡内的液面虽然不断下降,

但该段两端毛细管始终维持稳定的压强(仅跟两端高度差相关),在公式(6)的推导中是取整个长度为 L 的毛细管,而最终 L 其实可以消去,或者说,任取一段的毛细管,其管长并不影响最终原理。公式(6)中虽是泊肃叶公式,但就仪器的工作原理,经化简后其实跟管长无关,这正是该仪器的匠心之处,也是一个关键的细节。一些文献^[9-11]不直接利用泊肃叶流量公式而从另一角度推导该实验原理,甚至于认为泊肃叶公式只能应用于水平流管,显然无视这一关键细节,而且对于相关原理和模型研究不够深入,这也导致割裂了理论教学与实验之间深刻联系。因此本文在此特别指出这一点,这也是本文意义所在。

【参考文献】

- [1] 吴海娜,刘顺,公卫江,等. 用微元法巧解软绳下落过程的能量损失[J]. 物理与工程, 2016, 26(1): 72-75.
WU H N, LIU S, GONG W J, et al. A differential element method of solving the energy loss during soft rope drop process[J]. Physics & Engineering, 2016, 26(1): 72-75.
- [2] 吕效国. 关于积分微元法的三点说明[J]. 南京晓庄学院学报, 2006, 22(6): 5-6.
LÜ X G. Three explanations for differential element method of integral[J]. Journal of Nanjing Xiaozhuang University, 2006, 22(6): 5-6.
- [3] LEHOTZKY D, INSPERGER T, KHASAWNEH F, et al. Spectral element method for stability analysis of milling processes with discontinuous time-periodicity[J]. Int J Adv Manuf Technol, 2017, 89(9-12): 2503-2514.
- [4] LIU B, FERREIRA A J, XING Y F, et al. Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method[J]. Compos Struct, 2016, 136: 546-553.
- [5] VISWANATH D S, GHOSH T K, PRASAD D H, et al. Introduction [M]//Viscosity of Liquids. Springer Netherlands, 2007: 1-8.
- [6] KRISHNA M, WALLIS L P, WILLS R G, et al. Measurement of key electrolyte properties for improved performance of the soluble lead flow battery[J]. Int J Hydrogen Energy, 2017, 42(3): 5.
- [7] KAERKITCHA N, CHUANGCHOTE S, HACHIYA K, et al. Influence of the viscosity ratio of polyacrylonitrile/poly (methyl methacrylate) solutions on core-shell fibers prepared by coaxial electrospinning[J]. Polym J, 2017, 49(6): 497-502.
- [8] 付妍,梁路光. 医用物理学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
FU Y, LIANG L G. Medical physics experiment [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.
- [9] 李孔宁,高翠霞,高治文,等. 奥氏粘度计公式的正确推导[J]. 哈尔滨医科大学学报, 1994, 38(6): 466-467.
LI K N, GAO C X, GAO Z W, et al. The correct derivation of Ostwald viscometer formula[J]. Journal of Harbin Medical University, 1994, 38(6): 466-467.
- [10] 傅洪波,黄大同. 数理结合推导奥氏粘度计的测量原理[J]. 数理医药学杂志, 2007, 20(1): 107-108.
FU H B, HUANG D T. Combining the mathematical and physical principle to derive the measurement principle of Ostwald viscosimeter[J]. Journal of Mathematical Medicine, 2007, 20(1): 107-108.
- [11] 张盛华,秦任甲. 这样推导直立式毛细管粘度计的黏度计算公式是错误的[J]. 中国医学物理学杂志, 2011, 28(3): 120-121.
ZHANG S H, QIN R J. Coronary heart disease derived vertical type capillary viscometer viscosity is wrong[J]. Chinese Journal of Medical Physics, 2011, 28(3): 120-121.

(编辑:薛泽玲)